E.L. NIKOLAI

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL I

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

E. L. NIKOLAI

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL I

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

E. L. NIKOLAI · THEORETISCHE MECHANIK I

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND 21

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL I

VON
E. L. NIKOLAI

1955
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

Е. Л. НИКОЛАИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

Die Übersetzung und Bearbeitung besorgte ein Kollektiv unter der Leitung von
Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Neuber

Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 435/38/55
Gesamtherstellung: Druckerei Fortschritt, Erfurt, Zweigbetrieb

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Kapitel IX: *Das Moment in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Achse*

Kapitel X: *Die Addition von Kräften, die beliebig im Raum angeordnet sind*

Kapitel XI: *Der Schwerpunkt*

Seite

Zweiter Teil: DIE KINEMATIK

Vom Verlag

Die vorliegende deutsche Ausgabe des ersten Teiles der „Theoretischen Mechanik“ von E. L. Nikolai ist eine Übersetzung des unveränderten Nachdruckes der nach dem Tode des Verfassers erschienenen vierzehnten und fünfzehnten Auflage des Buches.

Aus dem Vorwort zur dreizehnten Auflage

In der vorliegenden dreizehnten Auflage erscheint der erste Teil meiner „Theoretischen Mechanik“ in einer etwas umgearbeiteten Form.

Der Grundinhalt des Buches ist unverändert geblieben, umgearbeitet wurden einzelne Stellen im Zusammenhang damit, daß in die Darstellung der Statik und der Kinematik (entsprechend dem gegenwärtig für die Technischen Hochschulen angenommenen Programm der theoretischen Mechanik) Elemente der Vektor-Algebra und der Vektor-Analysis eingeführt sind.

Die Einführung der Vektoren-Methode vereinfacht die Darlegung vieler Fragen der Mechanik ungemein. Zugleich muß man aber gestehen, daß in einigen Fällen durch eine zu weitgehende Anwendung dieser Methode für den Anfänger die Erfassung der Tatsachen nicht nur nicht erleichtert, sondern im Gegenteil erschwert werden kann. Dem Anfänger ist es nicht immer leicht, das mechanische Wesen der behandelten Fragen wegen der ihm ungewohnten formalen Vektor-Operationen zu erfassen, welche die Darstellung eigentlich erleichtern sollen. Darum schien es mir ratsam, die Einführung der Elemente der Vektor-Methode in ein Lehrbuch, das für Anfänger bestimmt ist, mit gebührender Vorsicht vorzunehmen.

Bei der Darstellung der theoretischen Mechanik kann man drei Methoden anwenden: die geometrische, die analytische (oder Koordinatenmethode) und schließlich die Vektor-Methode, die in der Anwendung der Symbolik der Vektor-Algebra und der Vektor-Analysis besteht. Ich habe es nicht für richtig gehalten, eine dieser Methoden beim Verfassen der vorliegenden Auflage meines Buches auszuschließen. Bei der

Darlegung jeder Frage habe ich die Methode gewählt, die — wie mir schien — am einfachsten und kürzesten zum Ziele führt. Natürlich ist das Element der Subjektivität bei der Frage der Zweckmäßigkeit dieser oder jener Methode in jedem gegebenen Falle unausbleiblich. Inwieweit diese Frage im vorliegenden Buch erfolgreich gelöst ist, das zu beurteilen wird dem Leser überlassen.

Die ersten Grundlagen der Vektor-Algebra sind in der Einführung in die Statik dargelegt. Alle weiteren notwendigen Kenntnisse aus der Vektor-Algebra und der Vektor-Analysis werden je nach Bedürfnis an den entsprechenden Stellen des Buches vermittelt.

In den vorhergehenden Auflagen trug das Buch den Titel „Vorlesungen über theoretische Mechanik", in der vorliegenden Auflage ist diese Bezeichnung durch „Theoretische Mechanik" ersetzt worden.

E. Nikolai

Erster Teil

DIE STATIK DES STARREN KÖRPERS

EINFÜHRUNG

§ 1. Statik, Kinematik, Dynamik

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung der materiellen Körper.

Unter Bewegung der Körper verstehen wir die im Laufe der Zeit vor sich gehende Veränderung ihrer Lage im Raum. Im weiteren Sinne (und zwar im Sinne einer jeglichen Veränderung des Zustandes der materiellen Körper, lebender Organismen, gesellschaftlicher Gruppen usw.) erscheint die Bewegung auch als Gegenstand des Studiums anderer Wissenschaften (der Physik, Chemie, Biologie, Gesellschaftswissenschaften). Die Lageänderung der Körper wird im Unterschied zu anderen Formen der Bewegung manchmal mechanische Bewegung genannt. Im weiteren werden wir unter dem Ausdruck „Bewegung“ immer die mechanische Bewegung verstehen.

In der theoretischen Mechanik werden die allgemeinen Gesetze der Bewegung der materiellen Körper untersucht und die allgemeinen Verfahren und Methoden für die Lösung aller Fragen aufgestellt, die sich auf die Bewegung der Körper beziehen. Die Anwendung der Grundsätze der Mechanik zur Lösung spezieller technischer Aufgaben (so z. B. zur Erforschung der Dauerfestigkeit von Bauteilen, zum Studium der Bewegung von Maschinen usw.) stellt den Inhalt der verschiedenen Zweige der angewandten Mechanik dar.

Die mechanischen Erscheinungen (d. h. die Erscheinungen der Bewegung der materiellen Körper) gehören zur Kategorie der physikalischen Erscheinungen. In diesem Sinne ist die theoretische Mechanik ein Zweig der theoretischen Physik.

Als ein Sonderfall der Bewegung erscheint das Gleichgewicht der Körper. Der Teil der Mechanik, in dem die Gleichgewichtsbedingungen der Körper studiert werden, heißt *Statik*. Die Gesetze des Gleichgewichts sind dem Wesen nach viel einfacher als die allgemeinen Gesetze der Bewegung; hieraus ist verständlich, daß die Statik viel einfacher und elementarer ist als die Teile der Mechanik, die der Untersuchung der Bewegungserscheinungen der Körper gewidmet sind. Daher werden wir auch in diesem ersten Teil unseres Lehrbuches das Studium der Mechanik mit der Statik beginnen (erster Teil). Diese Ordnung der Darlegung entspricht auch dem geschichtlichen Entwicklungsgang der Mechanik. Die Grundtheoreme der Statik waren bereits im Altertum bekannt, jedoch wurde das erfolgreiche Studium der Bewegungserscheinungen erst im Zusammenhang mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung im 17. Jahrhundert möglich.

Hierauf gehen wir zum Studium der Bewegung der materiellen Körper über. Wir werden uns zuerst (im zweiten Abschnitt des vorliegenden Teiles) mit der Untersuchung der Körperbewegungen von der rein geometrischen Seite her beschäftigen. Der Zweig der theoretischen Mechanik, in dem die geometrischen Eigenschaften der Bewegung studiert werden, heißt *Kinematik*. In der Kinematik wird die Bewegung der Körper außerhalb des Zusammenhanges mit den physikalischen Ursachen der Bewegung betrachtet.

Danach (im zweiten Teil des Lehrbuches) werden wir uns der Untersuchung der Bewegung der materiellen Körper im Zusammenhang mit den *physikalischen* Ursachen zuwenden, die jene bestimmen. Der dieser Untersuchung gewidmete Zweig der theoretischen Mechanik heißt *Dynamik*. In der Dynamik werden die allgemeinsten Gesetze der Bewegung der materiellen Körper aufgestellt.

Also zerfällt das Gebiet der theoretischen Mechanik in drei Hauptteile: in die Statik, die Kinematik und die Dynamik.

§ 2. Die Vektoren. Die Addition und Subtraktion der Vektoren

In allen Zweigen der Mechanik werden wir es mit solchen Größen zu tun haben, denen nicht nur eine zahlenmäßige Bedeutung, sondern auch eine Richtung im Raum zugeschrieben wird, z. B.: *Kraft*, *Geschwindigkeit*, *Beschleunigung* usw. Außerdem werden wir Größen begegnen, die zwar eine zahlenmäßige Bedeutung, aber keine Richtung haben; hierzu gehören *Masse*, *Energie* usw. Die physikalischen Größen dieser zwei Arten erhalten besondere Namen. Die Größen der ersten Art heißen *Vektorgrößen* oder kurz *Vektoren*, die Größen der anderen Art heißen *Skalargrößen* oder kurz *Skalare*.

Zur Einführung wollen wir einige Erklärungen über Vektorgrößen geben.[1]

Es erweist sich als zweckmäßig, bei der Bezeichnung einen Unterschied zwischen Vektor- und Skalargrößen zu machen. Die Skalargrößen werden wir mit Buchstaben der gewöhnlichen Schrift bezeichnen. Für die Bezeichnung der Vektoren werden wir jedoch eine besondere Schrift benutzen. Hier vereinbaren wir, daß wir einen Vektor durch Frakturbuchstaben kennzeichnen, seinen zahlenmäßigen Wert oder seinen absoluten Betrag (der als Skalargröße erscheint) jedoch mit demselben Buchstaben in gewöhnlicher Schrift. Also muß man einen Unterschied zwischen dem Vektor $\mathfrak{a}$ und seinem absoluten Betrag a machen. Manchmal werden wir für die Bezeichnung des absoluten Betrages des Vektors $\mathfrak{a}$ auch das Symbol $|\mathfrak{a}|$ benutzen.

Wir betrachten die Gerade AB (Abb. 1) und schreiben ihr eine bestimmte Richtung zu, z. B. vom Punkt A nach dem Punkt B; in der Abbildung ist diese Richtung durch eine Pfeilspitze gekennzeichnet, die beim Punkt B vermerkt ist. Ein solcher Abschnitt, dem eine bestimmte Richtung zugeschrieben ist, erscheint als einfachstes Beispiel einer Vektorgröße.

[1] Hier werden lediglich einige elementare Betrachtungen über die Vektoren gebracht, die für die Einführung in die Statik notwendig sind. Zum genaueren Studium der Vektorrechnung sei der Leser auf die entsprechenden Spezialwerke verwiesen.

Jeder Vektor $\mathfrak{a}$, der einen bestimmten absoluten Betrag a und eine bestimmte Richtung hat, kann durch eine Gerade AB graphisch dargestellt werden (Abb. 2), deren Länge a Längeneinheiten (willkürlich gewählt) enthält und deren Richtung mit dem Verlauf des Vektors zusammenfällt; in der Abbildung ist diese Richtung durch einen Pfeil gekennzeichnet. Der Punkt A heißt Ursprung des Vektors, der Punkt B das Ende des Vektors. Manchmal werden wir den gegebenen Vektor mit zwei Buchstaben AB bezeichnen, wobei wir vereinbaren, an erster Stelle den Buchstaben zu schreiben, der den Anfang des Vektors kennzeichnet, und an zweiter Stelle den Buchstaben, der das Ende des Vektors angibt. Hätte der Vektor $\mathfrak{a}$ einen Verlauf vom Punkt B nach dem Punkt A, so würde man ihn mit BA zu bezeichnen haben.

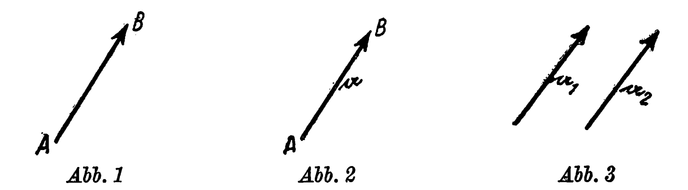


Abb. 1 *Abb. 2* *Abb. 3*

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ (Abb. 3) heißen gleich, wenn sie ihrem absoluten Betrage nach gleich und parallel sind und in der gleichen Richtung verlaufen.

Für die Bezeichnung der Gleichheit der Vektoren verwenden wir das gewöhnliche Gleichheitszeichen:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2.$$

Werden die Vektoren, die in einer beliebigen Vektorgleichung enthalten sind, mit zwei Buchstaben bezeichnet, so setzen wir über diese Buchstaben einen Querstrich. So schreiben wir z. B. die Gleichheit der Vektoren $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ folgendermaßen:

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Stellen wir uns mehrere Vektoren vor, z. B. vier Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ (Abb. 4), und bilden wir folgende Konstruktion: Von dem beliebigen Punkt A tragen wir den Vektor $\overline{AB}$ ab, der dem Vektor $\mathfrak{a}_2$ entspricht; vom Ende C dieses Abschnittes aus tragen wir den Vektor $\overline{CD}$ ab, der dem Vektor $\mathfrak{a}_3$ gleich ist; schließlich tragen wir vom Punkt D aus den Vektor $\overline{DE}$ ab, der dem Vektor $\mathfrak{a}_4$ gleich ist. Hierauf verbinden wir durch eine Gerade den Ursprung A des ersten Vektors mit dem Ende E des letzten Vektors. Den Vektor $\overline{AE}$ (dem wir den Verlauf vom Punkt A nach dem Punkt E zuschreiben) bezeichnen wir mit dem Buchstaben $\mathfrak{a}$. Der auf diese Weise konstruierte Vektor $\mathfrak{a}$ heißt die Summe der gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$, und die soeben aufgeschriebene Konstruktion heißt Addition der Vektoren; die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ erhalten die Bezeichnung *Vektor-Komponenten* (Abb. 4).

Zur Kennzeichnung der Addition von Vektoren verwenden wir das gewöhnliche Additionszeichen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4.$$

Sind uns n Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ gegeben und ist ihre Summe $\mathfrak{a}$, so schreiben wir:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n.$$

Wir nehmen die beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ (Abb. 5), tragen von dem beliebigen Punkt A die Vektoren $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ ab, welche den Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gleich sind, und verbinden die Punkte B und C durch eine gerade Linie; den Vektor $\overline{BC}$ (dem wir den Verlauf

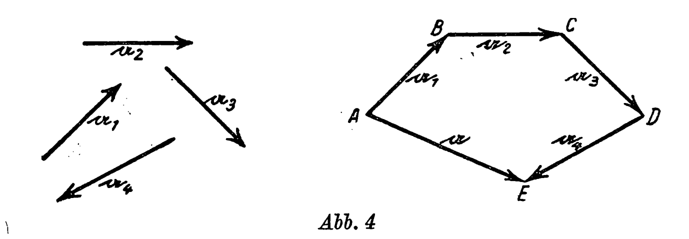


Abb. 4

von B nach C zuschreiben) bezeichnen wir mit dem Buchstaben $\mathfrak{a}$. Der Vektor $\mathfrak{a}$, der, mit dem Vektor $\mathfrak{a}_1$ addiert, den Vektor $\mathfrak{a}_2$ ergibt, heißt Differenz der Vektoren $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_1$; die beschriebene Konstruktion heißt Subtraktion der Vektoren.

Für die Bezeichnung der Subtraktion der Vektoren benutzen wir das gewöhnliche Subtraktionszeichen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1.$$

Wir merken uns den Sonderfall $\mathfrak{a}_2 = 0$. In diesem Falle fällt der Punkt C mit dem Punkt A zusammen; infolgedessen ist der Vektor $\mathfrak{a}$ seinem absoluten Betrage nach

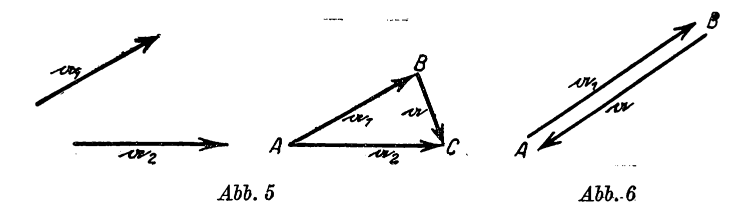


Abb. 5 *Abb. 6*

gleich $\mathfrak{a}_1$, er verläuft jedoch in entgegengesetzter Richtung (nicht von A nach B, sondern von B nach A, Abb. 6). Die soeben aufgestellte Gleichung nimmt in diesem Falle die Form

$$\mathfrak{a} = - \mathfrak{a}_1$$

an.

Hieraus schließen wir, daß $\mathfrak{a}$ ein Vektor ist, der seinem absoluten Betrage nach dem Vektor $\mathfrak{a}_1$ gleich ist, aber eine Richtung hat, die dem Vektor $\mathfrak{a}_1$ entgegengesetzt verläuft.

§ 3. Produkt aus Vektor und Skalar. Der Einheitsvektor

Nehmen wir an, uns sei irgendein Vektor $\mathfrak{a}$ und die positive Skalargröße m gegeben. Wir konstruieren einen neuen Vektor, dessen absoluter Betrag gleich dem absoluten Betrage a des gegebenen Vektors ist, multipliziert mit der Zahl m, dessen Richtung jedoch mit der des gegebenen Vektors $\mathfrak{a}$ zusammenfällt. Der erhaltene neue Vektor ist das Produkt des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Skalar m und wird mit $m\mathfrak{a}$ bezeichnet.

Man muß also, um den gegebenen Vektor mit irgendeiner positiven Skalargröße zu multiplizieren, den absoluten Betrag des Vektors mit dieser Größe multiplizieren und die Richtung unverändert lassen.

Wir wissen bereits, daß der Vektor $-m\mathfrak{a}$ sich von dem Vektor $m\mathfrak{a}$ nur durch die entgegengesetzte Richtung unterscheidet. Hieraus folgt, daß die Multiplikation des Vektors $\mathfrak{a}$ mit der negativen Skalargröße $-m$ auf die Multiplikation des absoluten Betrages a des gegebenen Vektors mit der Zahl m und die Umkehrung der Richtung des Vektors zurückgeführt wird.

Wenn die beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gleich sind, sind die Vektoren $m\mathfrak{a}_1$ und $m\mathfrak{a}_2$, die sich aus der Multiplikation der gegebenen Vektoren mit irgendeinem Skalar m ergeben haben, ebenfalls gleich. Infolgedessen gilt, wenn

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$$

ist, auch

$$m\,\mathfrak{a}_1 = m\,\mathfrak{a}_2 .$$

Somit wird die vektorielle Gleichheit durch die Multiplikation ihrer beiden Teile mit derselben Skalargröße nicht zerstört.

Nehmen wir einige Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ (Abb. 7) und addieren sie. Zu diesem Zweck konstruieren wir das Vieleck $MNPQR$, dessen Seiten die gegebenen Vektoren darstellen. Die Summe $\overline{MR}$ der gegebenen Vektoren bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$. Infolgedessen ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4 .$$

Verbinden wir jetzt die Punkte P und Q mit dem Punkt M durch Geraden und tragen vom Punkt M in Richtung der Strecken MN, MP, MQ, MR die Strecken $MN_1 = m \cdot MN$, $MP_1 = m \cdot MP$, $MQ_1 = m \cdot MQ$, $MR_1 = m \cdot MR$ ab, wobei m irgendeine positive Zahl ist. Wenn wir die Punkte N_1, P_1, Q_1, R_1 nacheinander durch Geraden verbinden, erhalten wir ein neues Vieleck $MN_1P_1Q_1R_1$, das dem Vieleck $MNPQR$ ähnlich ist. Die Seiten dieses neuen Vielecks sind parallel den ähnlichen Seiten des Vielecks $MNPQR$ und gleich diesen ähnlichen Seiten, multipliziert mit der gegebenen Zahl m. Hieraus folgt, daß die Vektoren $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$, $\overline{MR_1}$ gleich den Vektoren $m\mathfrak{a}_1$, $m\mathfrak{a}_2$, $m\mathfrak{a}_3$, $m\mathfrak{a}_4$, $m\mathfrak{a}$ sind.

Der Vektor $\overline{MR_1}$ ist aber die Summe der Vektoren $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$. Infolgedessen erhalten wir:

$$m\,\mathfrak{a} = m\,\mathfrak{a}_1 + m\,\mathfrak{a}_2 + m\,\mathfrak{a}_3 + m\,\mathfrak{a}_4 .$$

Die erhaltenen Ergebnisse kann man in folgender Weise formulieren: Um die Summe der Vektoren mit der gegebenen positiven Zahl zu multiplizieren, muß man jeden einzelnen Vektor mit dieser Zahl multiplizieren.

Wir setzten soeben die Zahl m als positiv voraus. Analog ist der Fall eines negativen m zu beweisen.

Der Vektor, dessen absoluter Betrag gleich Eins ist, heißt *Einheitsvektor*. Nehmen wir an, uns sei der Vektor $\mathfrak{a}$ gegeben. Wir nehmen den Einheitsvektor, der die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ hat, und bezeichnen diesen Einheitsvektor mit $\mathfrak{e}$ (so daß $e = 1$ ist). Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ haben die gleiche Richtung; $\mathfrak{a}$ ist gleich dem Vektor $\mathfrak{e}$, dessen absoluter Betrag gleich Eins ist, multipliziert mit der Zahl a:

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}.$$

Hieraus folgt, daß *jeder Vektor als Produkt seines absoluten Betrages und des entsprechenden Einheitsvektors dargestellt werden kann.*

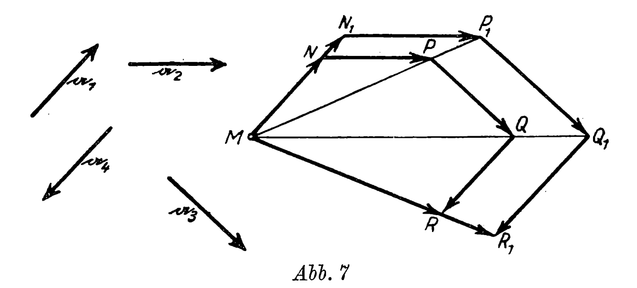


Abb. 7

§ 4. Die Projektionen des Vektors auf eine Achse und eine Ebene

Achse heißt eine unbegrenzte Gerade, der eine bestimmte Richtung zugeschrieben ist.

Nehmen wir den Vektor $\mathfrak{v}$ und die Achse x (Abb. 8) an, der wir die Richtung zuschreiben, die in der Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet ist. Wir bezeichnen den Anfang und das Ende des Vektors $\mathfrak{v}$ mit den Buchstaben A und B und legen durch die Punkte A und B die Ebenen P und Q, die senkrecht zur x-Achse stehen. Die Schnittpunkte a und b dieser Ebenen mit der x-Achse heißen *Projektionen der Punkte* A und B auf die x-Achse.

Die Größe der Strecke ab, die mit dem Pluszeichen versehen wird, wenn ihre Richtung mit der Richtung der x-Achse übereinstimmt, und mit dem Minuszeichen im entgegengesetzten Fall, heißt *Projektion des Vektors* $\mathfrak{v}$ auf die x-Achse[1]; wir bezeichnen diese Projektion mit v_x. Somit ist $v_x = \pm\, ab$, wobei das eine oder das andere Vorzeichen in dieser Formel der soeben formulierten Regel entspricht. Man muß dabei beachten, daß die Projektion des Vektors auf irgendeine Achse eine skalare Größe ist.

[1] Der durch die Strecke ab dargestellte Vektor heißt *Komponente des Vektors* $\mathfrak{v}$ auf der x-Achse.

Wir bemerken, daß man zum Finden der Punkte a und b die Ebenen P und Q nicht einzuführen braucht. Es genügt, von den Punkten A und B die Lote Aa und Bb auf die Achse x zu fällen, die Fußpunkte a und b dieser Lote sind die Projektionen der Punkte A und B auf die x-Achse.

Wir betrachten jetzt zwei parallele und gleichgerichtete Achsen x und x' (Abb. 9) und projizieren darauf den Vektor $\mathfrak{v}$. Zu diesem Zweck legen wir durch den Anfang und das Ende des Vektors A und B die Ebenen P und Q, die senkrecht zu den Achsen x und x' stehen. Wir bezeichnen die Projektionen der Punkte A und B auf die x-Achse mit a und b und die Projektionen derselben Punkte auf die x'-Achse mit a' und b'.

Die Projektionen ab und $a'b'$ des Vektors $\mathfrak{v}$ auf die Achsen x und x' sind der Größe nach gleich (wie die Abschnitte der Parallelen, die zwischen den parallelen Ebenen eingeschlossen sind) und haben die gleichen Vorzeichen. Somit sind die Projektionen des Vektors auf zwei parallele und gleichlaufende Achsen einander gleich.

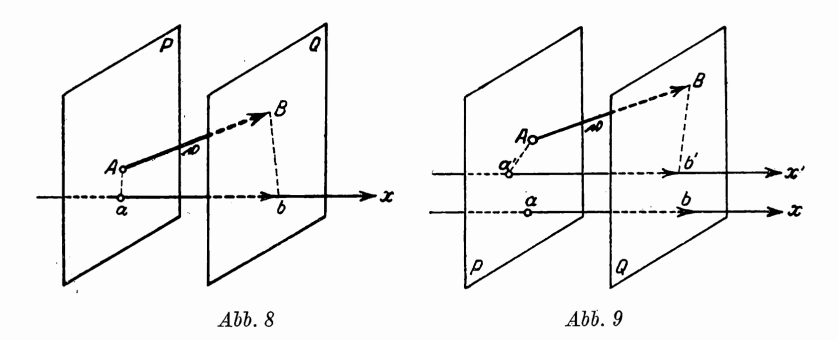


Abb. 8 *Abb. 9*

Diesen Umstand kann man bei der Konstruktion der Projektion des gegebenen Vektors auf die gegebene Achse benutzen. Anstatt den Vektor auf die gegebene Achse zu projizieren, ist es oft günstiger, den Vektor auf die Achse zu projizieren, die parallel und gleichgerichtet mit der gegebenen ist, aber durch den Anfang des Vektors verläuft.

In solchem Falle stellt sich die Konstruktion der Projektion des Vektors auf die Achse in folgender Form dar:

Gegeben sind der Vektor $\mathfrak{v}$ und die Achse x (Abb. 10). Durch den Anfang des Vektors A legen wir die Achse x', die parallel der x-Achse und ihr gleich gerichtet ist. Vom Ende des Vektors B fällten wir das Lot Bb auf die x'-Achse. Die Größe der Strecke Ab mit dem entsprechenden Vorzeichen ist die Projektion v_x des Vektors $\mathfrak{v}$ auf die x-Achse. Übereinstimmend mit der oben gemachten Bedingung bewerten wir sie als positiv, wenn die Richtung der Strecke Ab mit dem Verlauf der x-Achse zusammenfällt, als negativ aber im entgegengesetzten Falle.

Im weiteren werden wir bei der Projektion des Vektors auf die gegebene Achse gewöhnlich die Konstruktion benutzen, die in Abb. 10 gezeigt ist.

Aus dem Dreieck ABb (das an der Spitze b rechtwinklig ist) folgt, daß

$$v_x = v \cos(\mathfrak{v}, x) \tag{1}$$

ist, wobei $(\mathfrak{v}, x)$ der Winkel ist, der zwischen der Richtung des Vektors $\mathfrak{v}$ und dem Verlauf der x-Achse eingeschlossen ist. In der Abb. 10 ist die Projektion positiv. Wir empfehlen dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß die Formel (1) auch für eine negative Projektion v_x richtig bleibt.

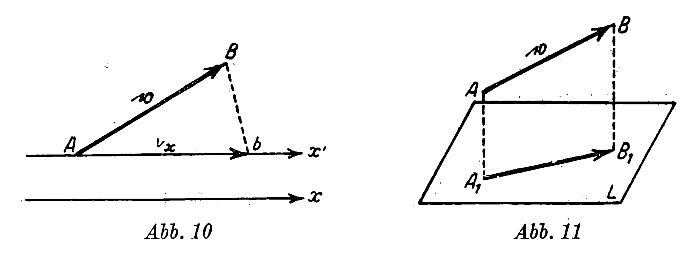


Abb. 10 *Abb. 11*

Nehmen wir an, daß uns der Vektor $\mathfrak{v}$ und die Ebene L (Abb. 11) gegeben sind. Wir fällen vom Anfang A und dem Ende B des Vektors die Lote AA_1 und BB_1 auf die Ebene L. Die Fußpunkte dieser Lote A_1 und B_1 heißen Projektionen der Punkte A und B auf die Ebene L. Der Vektor A_1B_1 (dem wir die Richtung von A_1 nach B_1 zuschreiben) heißt die Projektion des Vektors $\mathfrak{v}$ auf die Ebene L.

Wir bemerken noch einmal, daß wir die Projektion des Vektors auf eine Achse als Skalargröße betrachten. Die Projektion des Vektors auf eine Ebene erscheint dagegen als Vektorgröße.

§ 5. Die Projektion der Vektorensumme auf eine Achse und eine Ebene

Wir nehmen einige Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und die x-Achse (Abb. 12). Wir wollen die Summe $\mathfrak{a}$ der gegebenen Vektoren konstruieren und die Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und ebenso ihre Summe $\mathfrak{a}$ auf die x-Achse projizieren. Zu diesem Zweck fällen wir von den Punkten M, N, P, Q, R die Lote Mm, Nn, Pp, Qq, Rr auf die x-Achse. Bezeichnen wir die Projektionen der Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ auf die x-Achse mit

$$a_{1x}, \quad a_{2x}, \quad a_{3x}, \quad a_{4x}, \quad a_x,$$

so erhalten wir:

$$a_{1x} = mn, \quad a_{2x} = np, \quad a_{3x} = -pq, \quad a_{4x} = qr, \quad a_x = mr.$$

Aus der Abbildung ist jedoch ersichtlich, daß

$$mr = mm + np - pq + qr$$

ist. Infolgedessen ist

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + a_{4x}.$$

Somit ist *die Projektion der Vektorensummen auf die gegebene Achse gleich der Summe der Projektionen der Komponenten auf dieselbe Achse.*

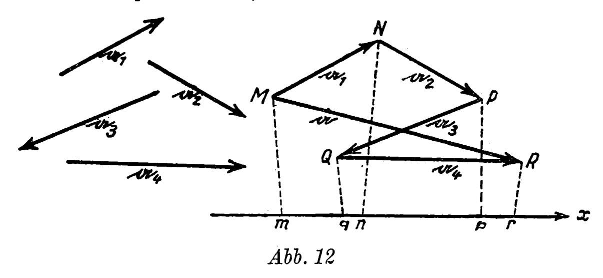


Abb. 12

Betrachten wir wieder einige Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und die Ebene L (Abb. 13).

Wir konstruieren die Summe der gegebenen Vektoren und projizieren die Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und ebenso ihre Summe $\mathfrak{a}$ auf die Ebene L. Zu diesem Zweck fällen wir von den Punkten M, N, P, Q die Lote MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1 auf die Ebene L. Die Vektoren $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$ sind die Projektionen der gegebenen Vektoren auf die Ebene L, während der Vektor $\overline{M_1Q_1}$ die Projektion ihrer Summe $\mathfrak{a}$ auf dieselbe Ebene ist.

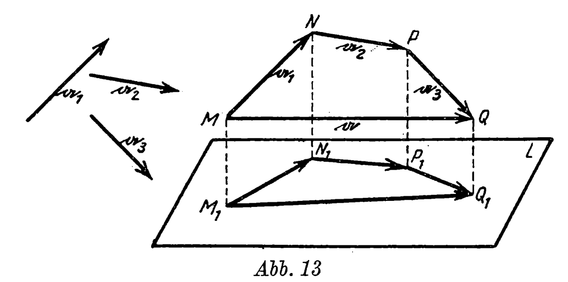


Abb. 13

Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß der Vektor $\overline{M_1Q_1}$ die Summe der Vektoren $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$ ist. Infolgedessen ist *die Projektion der Vektorensumme auf die gegebene Ebene gleich der Summe der Komponenten auf derselben Ebene.*

KAPITEL I

DIE AXIOME DER STATIK

§ 6. Der materielle Punkt. Erstes Axiom. Die Kraft

Wie schon im § 1 gesagt, beruht die theoretische Mechanik auf einer beschränkten Anzahl von Grundsätzen, die man Axiome der gegebenen Wissenschaft nennt und die das Ergebnis der Beobachtung unserer Umwelt sind; der übrige Inhalt der Mechanik wird als Folgerung aus den angenommenen Axiomen abgeleitet. Die Systeme der mechanischen Axiome hat zuerst NEWTON in seinem Werk „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“[1] aufgestellt.

Die Darlegung der allgemeinen mechanischen Axiome NEWTONs wollen wir für den Anfang des 2. Teiles dieses Lehrbuches, der der Dynamik gewidmet ist, zurückstellen. Jetzt jedoch, da wir an die Darlegung der Statik herantreten, wollen wir uns auf die Aufstellung der speziellen Axiome beschränken, die zur Begründung der Statik ausreichen (die aber nicht zur Begründung der gesamten Mechanik genügen).

Wir bemerken, daß in die Zahl dieser Axiome der Statik einige allgemeine NEWTONsche Axiome einbezogen sind; andere Grundsätze hingegen, die wir sofort übernehmen, ohne ihre axiomatischen Qualitäten nachzuweisen, können aus den NEWTONschen Axiomen gefolgert werden.

Jeden materiellen Körper vermögen wir uns in äußerst kleine Teilchen zerlegt vorzustellen. Ist das Teilchen eines stofflichen Körpers so klein, daß seine Ausmaße vernachlässigt werden können, so nennt man es einen *materiellen Punkt.*[2]

In der Mechanik stellen sich alle stofflichen Körper als Ansammlungen oder als Systeme materieller Punkte dar.

Wir stellen uns einen einzelnen materiellen Punkt vor und nehmen an, daß er so weit von allen anderen materiellen Körpern entfernt sei, daß er keinerlei Einfluß von seiten der anderen Körper erfährt. Einen solchen materiellen Punkt, der sich außerhalb der Einwirkung von anderen Körpern befindet, nennt man einen isolierten materiellen Punkt.

---

[1] Die erste Ausgabe des Werkes von Newton erschien im Jahre 1687.

[2] Eine genauere Definition des materiellen Punktes wird in der Dynamik gegeben werden.

Axiom I.

Ein isolierter materieller Punkt befindet sich entweder in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Dieses Axiom, auch *Trägheitsprinzip* genannt, ist von Galilei entdeckt worden.

Wir bemerken, daß man von der geradlinigen Bewegung eines Punktes spricht, wenn er sich auf einer Geraden bewegt; die Bewegung wird *gleichförmig* genannt, wenn der Punkt gleiche Wege in gleichen Zeiträumen durchläuft.

Stellen wir uns jetzt einen materiellen Punkt vor, der sich nicht geradlinig oder gleichförmig bewegt. Auf Grund des soeben aufgestellten Axioms schließen wir, daß dieser Punkt nicht isoliert ist, sondern daß er sich unter der Einwirkung anderer materieller Körper befindet. Die Einwirkung der anderen materiellen Körper auf den gegebenen materiellen Punkt, als deren Folge die nicht geradlinige oder *ungleichförmige* Bewegung dieses Punktes erscheint, nennt man *Kraft*. Wir sagen, daß die Kraft, die auf den gegebenen materiellen Punkt einwirkt, an diesem Punkt angreift. Der gegebene Punkt heißt *Angriffspunkt der Kraft*.

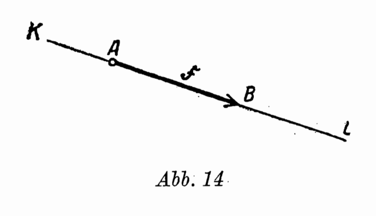


Abb. 14

Somit ist zu unterstreichen, daß jede Kraft die Wirkung eines Körpers auf den anderen ist. Als das einfachste und allen bekannte Beispiel der Kraft erscheint die *Schwerkraft*. Die Schwerkraft oder das Gewicht heißt die Kraft, mit der jeder Körper, der sich in der Nähe der Erdoberfläche befindet, von der Erde angezogen wird. Die Schwerkraft ist vertikal nach unten gerichtet.

Ohne auf die Aufzählung der in der Natur vorhandenen Kräfte einzugehen, bemerken wir, daß jede Kraft eine bestimmte Größe besitzt, welche meßbar ist. Wir wählen irgendeine beliebige Kraft als Krafteinheit. Die Messung der gegebenen Kraft bedeutet die Ermittlung, um wieviel mal die gegebene Kraft größer oder geringer ist als die Kraft, die als Einheit angenommen wurde. Zum Vergleich und zur Messung der Kräfte dienen Geräte, die *Dynamometer* heißen. Die Einheit der Schwerkraft ist das Gewicht von 1 dm³ Wasser bei 4° C. Diese Krafteinheit heißt *Kilogramm*.[1] Die aus dem Kilogramm hergeleiteten Einheiten sind das *Gramm* (= 0,001 kg) und die *Tonne* (= 1000 kg). Die Größe der Kraft, die in den angenommenen Einheiten gemessen ist, wird durch eine Zahl ausgedrückt; wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben F.

Neben einer bestimmten Zahlengröße hat jede Kraft ihre bestimmte Richtung. So ist die Schwerkraft vertikal nach unten gerichtet. Folglich ist die Kraft eine Vektorgröße. Die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkt A angreift, wird graphisch durch den Abschnitt AB dargestellt (Abb. 14), der vom Angriffspunkt A in Kraftrichtung abgetragen ist. Die Länge des Abschnittes AB stellt F in willkürlich ausgewählten Längeneinheiten dar.

[1] Genauer wird die Krafteinheit, das Kilogramm, nach dem Gewicht des Urmaßes aus Platin (welches in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird) in der Höhe des Meeresspiegels auf dem 45. Breitengrad bestimmt. Das Gewicht dieses Urmaßes ist nicht genau dem Gewicht von 1 dm³ Wasser bei 4° C gleich.

Der Punkt A heißt Anfang der Kraft $\mathfrak{F}$, der Punkt B das Ende dieser Kraft. An das Ende B setzt man einen Pfeil, der die Kraftrichtung anzeigt. Die Gerade KL, auf der der die Kraft darstellende Abschnitt liegt, heißt *Wirkungslinie der Kraft.*

Wenn der materielle Punkt A, an dem die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ angreifen, sich in Ruhe befindet oder sich geradlinig und gleichförmig bewegt, sagt man, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sich gegenseitig aufheben.

§ 7. Die inneren und äußeren Kräfte. Der absolut starre Körper. Zweites Axiom. Drittes Axiom. Die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie

Stellen wir uns jetzt irgendeinen Körper endlicher Ausmaße vor. Wie bereits im vorhergehenden Paragraphen erklärt, sehen wir jeden materiellen Körper (den festen, den flüssigen oder den gasförmigen) als Ansammlung oder System materieller Punkte an. Alle Kräfte, die auf materielle Punkte einwirken und zu dem Bestand des gegebenen Körpers gehören, unterteilen wir in zwei Gruppen: in die *inneren und die äußeren Kräfte.* Innere Kräfte heißen die Kräfte der wechselseitigen Einwirkung zwischen den materiellen Punkten des gegebenen Körpers. Äußere Kräfte sind dagegen solche Kräfte, die auf die materiellen Punkte des gegebenen Körpers von seiten anderer stofflicher Körper einwirken.

Abb. 15

Wir stellen uns einen Körper vor, an dem die äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ angreifen (Abb. 15). Diese äußeren Kräfte rufen innere Kräfte hervor, die zwischen den materiellen Punkten des gegebenen Körpers wirksam sind; die inneren Kräfte sind auf der Zeichnung nicht dargestellt. Wenn der gegebene Körper sich in Ruhe oder in geradliniger und gleichförmiger Bewegung befindet, sagt man, daß die äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sich gegenseitig aufheben. Man sagt auch, der gegebene Körper befindet sich im Gleichgewicht.

In unserem Lehrgang der Statik werden wir uns nicht mit dem Studium der inneren Kräfte beschäftigen. Die zwischen den materiellen Punkten des starren Körpers wirkenden inneren Kräfte werden bei der Behandlung der Widerstände der Stoffe und in der Elastizitätstheorie untersucht. Das Studium der inneren Kräfte in flüssigen und gasförmigen Körpern gehört in das Gebiet der Hydromechanik und der Gastheorie. Unsere Aufgabe ist es, die Bedingungen aufzustellen, die die äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ erfüllen müssen, damit sich der Körper im Gleichgewicht befindet. Aber auch diese Aufgabe werden wir noch einschränken. In allen weiteren theoretischen Untersuchungen werden wir die Bedingungen des Gleichgewichtes von nur einer einzigen Kategorie von Körpern studieren, und zwar der *absolut starren Körper.* Ein absolut starrer Körper ist ein solcher, bei dem die Abstände zwischen jeweils zwei Punkten unter allen Bedingungen unverändert bleiben.

In der Natur gibt es keine Körper, die der Definition des absolut starren Körpers entsprechen. Alle stofflichen Körper, wie fest sie auch sein mögen, weisen unter be-

stimmten Bedingungen immerhin kleine Veränderungen der Form auf. In vielen Fragen spielen diese unbedeutenden Änderungen (oder Deformationen) jedoch eine nebensächliche Rolle. Dann kann man sie außer acht lassen und die Körper als absolut starr betrachten.

Somit kann die Aufgabe unseres Lehrganges der Statik in folgender Weise formuliert werden: Erforschung der Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte, die an dem absolut starren Körper angreifen. In welchem Maße die Ergebnisse, die beim Studium des Gleichgewichts der absolut starren Körper erzielt werden, eine Bedeutung für die Lösung der Frage nach dem Gleichgewicht der nichtfesten Körper haben, wird im § 10 erklärt werden.

Da wir in den weiteren theoretischen Untersuchungen die inneren Kräfte nicht zu berücksichtigen brauchen, vereinbaren wir, wegen des kürzeren Ausdrucks, statt der Worte ,,äußere Kraft" nur ,,Kraft" zu sagen. Wir vereinbaren ebenfalls, den Ausdruck ,,absolut starrer Körper" durch die kürzere Bezeichnung ,,starrer Körper" zu ersetzen. Also werden wir im weiteren das Wort ,,Kraft" (sofern nicht besonders auf eine innere Kraft hingewiesen ist) als ,,äußere Kraft" und den Ausdruck ,,starrer Körper" als ,,absolut starrer Körper" verstehen müssen.

Die Gleichgewichtsbedingungen zweier Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, werden durch das zweite Axiom der Statik festgelegt.

Axiom II

Zwei Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, heben sich gegenseitig dann und nur dann auf, wenn sie von gleicher Größe sind und auf einer Geraden in entgegengesetzten Richtungen wirken.

Nehmen wir an, daß an einem starren Körper zwei Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ angreifen (Abb. 16). Diese Kräfte heben sich gegenseitig nur dann auf, wenn sie auf einer Geraden wirken und wenn

$$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1$$

ist.

Gehen wir zum dritten Axiom über.

Angenommen, irgendein starrer Körper befinde sich unter der Einwirkung der an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht. Weiter nehmen wir an, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ sei eine Gruppe von sich gegenseitig aufhebenden Kräften. Vereinigen wir die Kräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ mit den Kräften, die auf unseren festen Körper einwirken. Wir betrachten als Axiom, daß die Hinzufügung der sich gegenseitig aufhebenden Kräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ nicht das Gleichgewicht des gegebenen Körpers stört, d. h., daß er bei der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ im Gleichgewicht verbleibt.

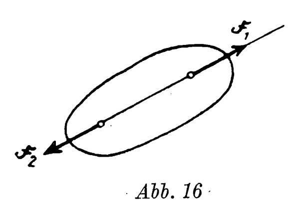


Abb. 16

Nehmen wir wiederum an, ein beliebiger starrer Körper befinde sich unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht, und in der Zahl dieser Kräfte sei die Gruppe der sich gegenseitig ausgleichenden Kräfte

$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k$ enthalten. Wir werfen die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k$ ab und stellen als Axiom auf, daß die Abtrennung der sich gegenseitig aufhebenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k$ nicht das Gleichgewicht des gegebenen Körpers stört, d. h., daß er unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sein Gleichgewicht bewahrt.

Also können wir, indem wir das soeben Gesagte zusammenfassen, das dritte Axiom wie folgt formulieren:

Axiom III

Die Hinzufügung und Wegnahme von Kräften, die sich gegenseitig aufheben, stören nicht das Gleichgewicht eines starren Körpers.

Dieses Axiom wird ständig bei der Erforschung der Statik benutzt. Wenden wir sogleich dieses Axiom zur Ermittlung einer wichtigen Eigenschaft der Kraft an, die am starren Körper angreift.

Wir nehmen an, der starre Körper befinde sich unter der Einwirkung der an dem Punkt A (Abb. 17) angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ und anderer in der Abbildung nicht dargestellter Kräfte im Gleichgewicht.

Betrachten wir einen beliebigen Punkt B auf der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$ und legen an diesen Punkt zwei Kräfte $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ an, die der Größe nach gleich der Kraft $\mathfrak{F}$ sind (so daß $F = F' = F''$). Die Kraft $\mathfrak{F}'$ verschieben wir entlang der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$ in Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ und die Kraft $\mathfrak{F}''$ in die entgegengesetzte Richtung. Da die Kräfte $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sich gegenseitig aufheben (Axiom II), wird durch sie das Gleichgewicht der Körper nicht gestört (Axiom III). Die Kräfte $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ heben sich jedoch ebenfalls gegenseitig auf (Axiom II); folglich kann man sie, weil sie das Gleichgewicht nicht stören, abwerfen (Axiom III). Bei diesem Abwerfen bleibt die Kraft $\mathfrak{F}'$ übrig, die die anfangs gegebene Kraft $\mathfrak{F}$ ersetzt. Folglich wird das Gleichgewicht des Körpers bei Ersatz der Kraft $\mathfrak{F}$ durch die Kraft $\mathfrak{F}'$ nicht gestört. Das Gleichgewicht des festen Körpers bleibt also bei Verschiebung des Angriffspunktes entlang der Wirkungslinie der Kraft nach einem beliebigen Punkt des Körpers erhalten. Wir werden dieses Verfahren der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie oft benutzen.[1]

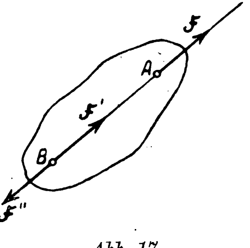


Abb. 17

§ 8. Statisch äquivalente Kräftesysteme. Die Resultierende. Viertes Axiom

Die beiden Kräftesysteme $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m$, die an einem starren Körper angreifen, heißen *statisch äquivalente Systeme*, wenn man das eine System durch das andere ersetzen kann, ohne das Gleichgewicht des Körpers zu stören. Wenn

[1] Um ein Mißverständnis zu vermeiden, müssen wir bemerken, daß die Zuordnung und Absonderung von sich gegenseitig aufhebenden äußeren Kräften, die das Gleichgewicht des Körpers nicht stören, gleichzeitig das Bild der Verteilung der inneren Kräfte des Körpers wesentlich verändern. Deshalb ist die Anwendung des Axioms III, das bei der Erforschung der Gleichgewichtsfragen der äußeren Kräfte voll berechtigt ist, in keiner Weise beim Studium der im Körper entstehenden inneren Kräfte zulässig. Insbesondere kann die Verlagerung der äußeren Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie bei der Lösung der Verteilungsfrage der inneren Kräfte des Körpers nicht zugelassen werden.

das Kräftesystem $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ nur der Kraft $\mathfrak{R}$ äquivalent ist, heißt diese Kraft $\mathfrak{R}$ die *Resultierende* der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$; diese letzteren Kräfte hingegen werden als Kräftekomponenten bezeichnet. Das Vertauschen des Kräftesystems $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ mit ihrer Resultierenden $\mathfrak{R}$ heißt *Kräftezusammensetzung.* Der umgekehrte Prozeß des Ersatzes der Kraft $\mathfrak{R}$ durch ihre Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ heißt *Zerlegung der gegebenen Kraft* $\mathfrak{R}$ in Kräftekomponenten.

Nehmen wir an, daß die Kraft $\mathfrak{R}$ die Resultierende des Kräftesystems $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sei. Die Kraft $\mathfrak{R}'$, die in ihrer Größe $\mathfrak{R}$ entspricht, verläuft auf derselben Geraden wie die Kraft $\mathfrak{R}$, jedoch in entgegengesetzter Richtung. Die Kraft $\mathfrak{R}'$ hebt sich mit der Kraft $\mathfrak{R}$ auf. Wir können, ohne das Gleichgewicht zu stören, die Kraft $\mathfrak{R}$ durch das ihr äquivalente Kräftesystem $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ersetzen. Folglich hebt sich die Kraft $\mathfrak{R}'$ ebenfalls mit dem Kräftesystem $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf. Diese Kraft $\mathfrak{R}$ heißt die *Gegenkraft des Kräftesystems* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Somit sind die Resultierende und die Gegenkraft ihrer Größe nach gleich, sie wirken auf derselben Geraden in entgegengesetzten Richtungen.

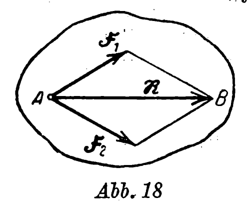


Abb. 18

Wir wollen jedoch sofort bemerken, daß nicht jedes Kräftesystem eine Resultierende besitzt (und folglich nicht jedes Kräftesystem durch eine einzige Gegenkraft aufgehoben werden kann). Im weiteren wird eine Bedingung aufgestellt werden, der ein Kräftesystem entsprechen muß, damit eine Resultierende existieren kann.

Nehmen wir an, daß an dem Punkt A eines starren Körpers zwei Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ angreifen (Abb. 18). Wir betrachten als Axiom, daß zwei derartige Kräfte eine Resultierende haben, die sich in folgender Weise bestimmen läßt:

Axiom IV

Die Resultierende zweier an einem Punkte angreifender Kräfte greift an demselben Punkt an und wird durch die Diagonale eines aus den gegebenen Kräften gebildeten Parallelogramms dargestellt.

Folglich greift die Resultierend $\mathfrak{R}$ der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ an dem Punkt A an. Sie ist der Diagonalen AB des Parallelogramms gleich, das aus den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ konstruiert ist und in der Richtung vom Punkt A nach dem Punkt B verläuft.

§ 9. Fünftes Axiom. Wirkung und Gegenwirkung. Beispiele

Das fünfte Axiom wird folgendermaßen formuliert:

Axiom V

Jede Wirkung entspricht einer entgegengesetzt verlaufenden Gegenwirkung.

Wir wissen bereits (§ 6), daß jede Kraft die Wirkung eines Körpers auf einen anderen ist. Der Sinn des soeben formulierten Axioms besteht darin, daß, wenn auf den materiellen Punkt A (Abb. 19) irgendeine Kraft $\mathfrak{F}_1$ von seiten des materiellen Punktes B wirkt, auch die Kraft $\mathfrak{F}_2$ aus der Richtung des Punktes A auf den

Punkt B wirkt, wobei diese beiden Kräfte gleiche Größe haben und auf der diese Punkte verbindenden Geraden nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Eine von diesen Kräften erhält die Bezeichnung *Wirkung*, die andere heißt *Gegenwirkung.*[1]

Also stellt das fünfte Axiom fest, daß es in der Natur keine einseitige Kräftewirkung geben kann, oder kürzer ausgedrückt, *die Wirkung ist gleich der Gegenwirkung*. Dieses Axiom wurde von NEWTON aufgestellt.

Wir erläutern das Gesagte durch Beispiele:

1. *Die Weltgravitation.* Weltgravitation nennt man die Anziehungskraft, die zwischen jedweden zwei materiellen Körpern wirksam ist. Die Erde und der Mond ziehen sich gegenseitig an, wobei die Anziehungskraft des Mondes der Größe nach gleich der der Erde ist. Die Anziehungskräfte verlaufen beide in entgegengesetzten Richtungen auf der Geraden, die durch das Zentrum der Erde und das des Mondes verläuft.

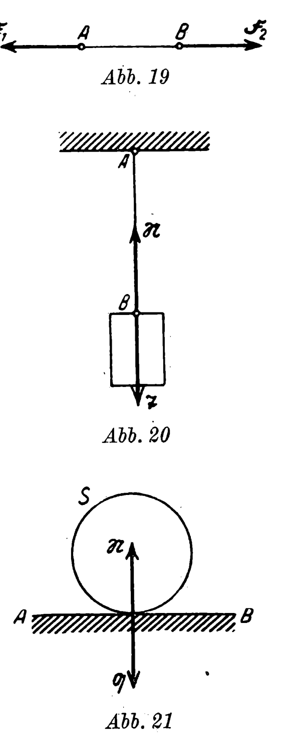


Abb. 19

Abb. 20

Abb. 21

2. *Die Zugkraft und die Reaktion des Fadens.* Nehmen wir an, daß an einem festen Punkt A der Faden AB befestigt ist (Abb. 20), an dessen Ende B eine Last hängt. An dem unteren Fadenende B greift die Kraft $\mathfrak{T}$ an, die die Wirkung auf den mit der Last behängten Faden darstellt. Diese Kraft, Zugkraft des Fadens genannt, ist gleich dem Gewicht der angehängten Last und verläuft vertikal nach unten. Gleichzeitig greift an dem Lastpunkt, an dem das Fadenende B befestigt ist, die Kraft $\mathfrak{N}$ an, die die Wirkung des Fadens auf die Last darstellt; diese Kraft heißt Reaktion (oder Gegenwirkung) des Fadens, sie ist der Größe nach gleich der Zugkraft $\mathfrak{T}$ und verläuft vertikal nach oben.

3. *Der Druck auf die Ebene und die Reaktion der Ebene.* Wir nehmen an, daß auf einer unbeweglichen horizontalen Ebene AB eine Kugel S ruht (Abb. 21). An der Ebene AB greift im Berührungspunkt der Ebene mit der Kugel die Kraft $\mathfrak{Q}$ an. Diese Kraft heißt der Druck der Kugel auf die Ebene, sie ist dem Gewicht der Kugel gleich und vertikal nach unten gerichtet. An der Kugel S greift im Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene die Kraft $\mathfrak{N}$ an, die die Reaktion der Ebene heißt. Diese Kraft ist der Größe nach dem Druck $\mathfrak{Q}$ gleich und vertikal nach oben gerichtet.

---

[1] Um ein Mißverständnis zu vermeiden, sei bemerkt, daß, wenn die materiellen Punkte A und B (Abb. 19) nicht ein und demselben starren Körper angehören, die angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die wir Wirkung und Gegenwirkung nannten, sich keineswegs gegenseitig aufheben, obwohl sie auf einer Geraden in entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Das Axiom II läßt sich bei diesen Kräften nicht anwenden. Dieses Axiom spricht von Kräften, die an ein und demselben starren Körper angreifen. Es ist vollkommen klar, daß die materiellen Punkte A und B unter der Einwirkung der an ihnen angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht im Gleichgewicht verbleiben können, wenn sie in keiner Weise miteinander verbunden sind; sie kommen in Bewegung und entfernen sich voneinander.

4. *Der Druck auf die Auflager und die Auflagerreaktionen.* Stellen wir uns einen horizontalen Träger AB vor, der auf zwei Auflagern liegt (Abb. 22). Der Träger übt auf die Auflager einen Druck aus; diese Druckkräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ greifen an den Auflagern an und sind vertikal nach unten gerichtet. Umgekehrt greifen am Träger an seinen Berührungspunkten mit den Auflagern die Kräfte $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ an, die die Wirkung der Auflager auf den Träger darstellen. Diese Kräfte $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ heißen *Auflagerreaktionen*, sie sind der Größe nach gleich den Kräften Q_1 bzw. Q_2 und vertikal nach oben gerichtet.

5. *Die Reibungskraft.* Die Erfahrung zeigt, daß an einem sich bewegenden Körper, wenn er auf der Oberfläche eines andern gleitet, eine Kraft angreift, die eine der Bewegung entgegengesetzte Richtung hat, sie heißt *Reibungskraft.* Stellen wir uns vor, es befinde sich auf einer unbeweglichen horizontalen Ebene AB (Abb. 23) ein Körper

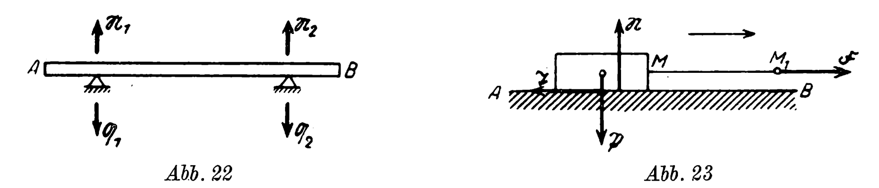


Abb. 22 *Abb. 23*

M, an dem ein Faden MM_1 befestigt ist. Nehmen wir an, wir zwingen den Körper M auf der Ebene AB in der Pfeilrichtung von links nach rechts zu gleiten, indem wir mittels des Fadens M_1 dem Körper M eine geradlinige und gleichförmige Bewegung verleihen. Dem Körper M werden sein Gewicht $\mathfrak{P}$, die Reaktion $\mathfrak{N}$ der Ebene (die ihrem absoluten Betrage nach gleich dem Gewicht $\mathfrak{P}$ ist) und die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ zugeordnet, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist. Durch die Versuche von Coulomb (1781) und Moren (1833) wurde festgestellt, daß die Größe der Reibungskraft $\mathfrak{T}$ proportional der Größe der Reaktion $\mathfrak{N}$ ist, oder, was dasselbe ist, die Reibungskraft ist proportional dem Druck des Körpers auf die Ebene, so daß man schreiben kann:

$$T = f N ,$$

wobei f ein Koeffizient ist, der vom Material der sich reibenden Körper und vom Grad der Unebenheit ihrer Oberflächen, nicht aber von der Größe der sich reibenden Oberflächen und der Geschwindigkeit des Gleitens abhängt. Dieser Koeffizient f heißt *Reibungskoeffizient.*[1]

Die Oberfläche der sich reibenden Körper heißt absolut glatt, wenn $f = 0$ ist. Wir bemerken, daß der Winkel φ, der durch die Bedingung $\operatorname{tg}\varphi = f$ bestimmt ist, *Reibungswinkel* heißt.

Da sich der Körper gemäß unserer Voraussetzung geradlinig und gleichförmig bewegt, müssen sich die an ihm angreifenden Kräfte gegenseitig aufheben. Hieraus

[1] Die letzten Erfahrungen zeigten, daß der Reibungskoeffizient f in einem gewissen Grade auch von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher der eine Körper auf der Oberfläche des anderen gleitet. Hiervon wird im zweiten Teil unseres Lehrbuches ausführlicher die Rede sein.

folgt, daß sich die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ mit der Zugkraft $\mathfrak{F}$ des Fadens M_1 ausgleicht, d. h. $T = F$ oder

$$F = fN.$$

Nehmen wir jetzt an, daß wir dem Ende M_1 des Fadens MM_1 die Kraft $\mathfrak{F}$ zuordnen, die in der Richtung verläuft, wie sie Abb. 23 angibt, aber der Größe nach geringer als fN ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß wir es nicht vermögen, durch Hinzufügung dieser Kraft $\mathfrak{F}$ den Körper M zu bewegen, er bleibt in Ruhe. Die Kräfte, die an dem Körper M angreifen, müssen sich auch jetzt gegenseitig aufheben. Folglich muß auch jetzt die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ vorhanden sein, die die Kraft $\mathfrak{F}$ ausgleicht. Diese Reibungskraft $\mathfrak{T}$ verläuft in einer Richtung, die der der Kraft $\mathfrak{F}$ entgegengesetzt ist und muß der Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ gleich sein. Da laut Voraussetzung $F < fN$ ist, folgt hieraus:

$$T < fN.$$

Somit gilt im Falle des Gleitens des Körpers M auf der Ebene AB

$$T = fN;$$

jedoch im Falle der Ruhe des Körpers M gilt

$$T < fN.$$

Der Grenzwert der Reibungskraft im Fall eines ruhenden Körpers wird durch die Formel $T = fN$ bestimmt, so daß im Ruhefall überhaupt

$$T \leqq fN$$

geschrieben werden kann.

6. *Die inneren Kräfte.* Die inneren Kräfte, die zwischen den Teilchen eines Körpers wirken, sind dem Axiom „die Wirkung ist gleich der Gegenwirkung“ untergeordnet. Diesem Axiom entsprechend sind die inneren Kräfte der Wechselwirkung zwischen

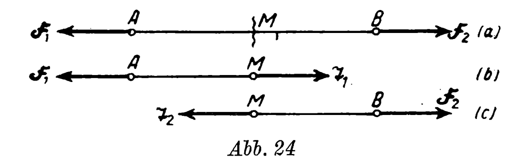


Abb. 24

zwei Teilchen des Körpers der Größe nach gleich und verlaufen auf der diese Teilchen verbindenden Geraden in entgegengesetzten Richtungen. Wir haben bereits gesagt, daß die Frage der Bestimmung der inneren Kräfte nicht in den Rahmen dieses Lehrbuches gehört. Um aber einen Begriff davon zu vermitteln, auf welche Weise die inneren Kräfte bestimmt werden können, wollen wir das folgende einfachste Beispiel betrachten.

Stellen wir uns einen Stab AB (Abb. 24a) vor, der durch die der Größe nach gleichen Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die an seinen Enden angreifen, gestreckt wird. Bezeichnen wir ihre gemeinsame Größe mit F, so daß $F_1 = F_2 = F$ ist. Wir wählen auf der Stabachse irgendeinen Punkt M und vollführen hier in Gedanken einen Schnitt, der den Stab in zwei Teile AM und MB zerschneidet. In diesem Schnitt haben wir zwei innere Kräfte: die eine von ihnen, $\mathfrak{T}_1$, greift an dem Ende M des Teiles AM an und stellt die Wirkung des Teiles AM auf den Teil MB dar, die andere Kraft aber, $\mathfrak{T}_2$, greift am Ende M des Teiles MB an und stellt die Wirkung des Teiles AM auf den Teil MB dar. Gemäß dem Axiom „die Wirkung ist gleich der Gegenwirkung" sind diese zwei inneren Kräfte gleich und verlaufen in entgegengesetzten Richtungen. Wir bezeichnen ihre gemeinsame Größe mit dem Buchstaben T (so daß $T_1 = T_2 = T$ ist).

Um die Größe T der uns interessierenden inneren Kräfte zu bestimmen, wenden wir uns der Betrachtung des Gleichgewichtes eines der Stabteile AM oder MB zu (der besseren Anschaulichkeit wegen sind diese Stabteile in Abb. 24b und 24c einzeln dargestellt). Betrachten wir z. B. den Teil AM. Wie der ganze Stab AB, so befindet sich auch der Teil AM im Gleichgewicht; folglich müssen die an dem Teil AM angreifenden Kräfte sich gegenseitig aufheben. An dem Teil AM greift die Kraft $\mathfrak{F}_1$ im Punkt A und die Kraft $\mathfrak{T}_1$ im Punkt M an. Aus den Bedingungen ihres Gleichgewichts schließen wir, daß

$$T = F$$

ist.

Somit wirken in einem beliebigen Schnitt des Stabes, den äußere Kräfte auf Zug beanspruchen, innere Kräfte, die den äußeren Kräften gleich sind. Jede dieser inneren Kräfte heißt *Dehnungskraft*.

Wenn die äußeren Kräfte den Stab AB nicht ausdehnen, sondern zusammendrücken würden, so erhielten wir im Schnitt M auch keine ausdehnenden, sondern zusammendrückende Kräfte, die den äußeren Kräften gleich sind. Wir bemerken, daß wir die Dehnungskräfte mit dem Buchstaben T und die Druckkräfte mit dem Buchstaben S bezeichnen werden.

Für den Stab AB erscheinen die beiden Kräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ als innere Kräfte. Für jeden einzelnen der Stabteile AM und MB erscheint jedoch die entsprechende an ihm angreifende Kraft $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ als äußere Kraft. Auf diese Weise haben wir mit Hilfe des Schnittes die uns interessierenden Kräfte in die Ordnung der äußeren Kräfte übergeführt. Gerade darin besteht der Gedanke der dargelegten Methode, die man Schnittmethode nennen könnte.

Dieser Methode bedient man sich immer bei der Bestimmung der inneren Kräfte. Nach Vollzug des benötigten Schnittes wird der Teil des Körpers abgetrennt, dessen Gleichgewicht dann betrachtet werden soll. Zu den an dem abgetrennten Teil des Körpers angreifenden Kräften gehören die inneren Kräfte, die im Schnitt wirken. Dabei erweisen sich, wenn lediglich der abgetrennte Teil des Körpers betrachtet und sein restlicher Teil vernachlässigt wird, die inneren Kräfte in bezug auf den gesamten Körper als in die Zahl der äußeren Kräfte einbegriffen. Alsdann werden diese Kräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen des abgetrennten Teiles des Körpers bestimmt.

§ 10. Das Gleichgewicht nichtstarrer Körper. Sechstes Axiom

Verweilen wir jetzt bei der Frage des Gleichgewichtes der nichtstarren Körper.

Nehmen wir an, daß irgendein materieller Körper A, den wir als nichtstarr betrachten, sich unter der Einwirkung der an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befindet. Stellen wir uns den Körper B vor, der der Form nach mit dem gegebenen Körper A identisch, jedoch absolut starr ist. Wir stellen als Axiom auf, daß, wenn sich der nichtstarre Körper A im Gleichgewicht unter der Wirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ befindet, auch der starre Körper B im Gleichgewicht unter der Einwirkung derselben Kräfte bleibt.

Den Ersatz des gegebenen nichtstarren Körpers durch den starren Körper B kann man sich als Erstarren des Körpers A vorstellen. In diesem Falle erhält das erwähnte Axiom folgende Formulierung:

Axiom VI

Das Gleichgewicht eines nichtstarren Körpers wird nicht durch das Erstarren des gegebenen Körpers gestört.

Dieses Axiom, das gelegentlich das *Prinzip der Erstarrung* genannt wird, benutzt man häufig beim Studium des Gleichgewichts nichtstarrer Körper. Aus diesem Axiom geht hervor, daß die Kräfte, unter deren Einwirkung ein nichtstarrer Körper im Gleichgewicht steht, den gleichen Gleichgewichtsbedingungen entsprechen müssen wie die Kräfte, die an dem festen Körper angreifen. Mit anderen Worten, die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers sind auch auf den nichtstarren Körper anwendbar.

Wir müssen jedoch beachten, daß die Gleichgewichtsbedingungen, die notwendig und ausreichend für das Gleichgewicht des starren Körpers sind, sich zwar als notwendig, aber nicht als hinreichend für das Gleichgewicht des nichtstarren Körpers erweisen. Damit das Gleichgewicht des nichtstarren Körpers gesichert ist, müssen die an ihm angreifenden Kräfte nicht nur den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers, sondern auch noch einigen zusätzlichen Bedingungen entsprechen. Dies soll an dem folgenden einfachen Beispiel erläutert werden.

Wir stellen uns einen Faden AB vor, der sich unter dem Einfluß zweier an seinen Enden angreifender Kräfte im Gleichgewicht befindet (Abb. 25). Diesen Faden wollen wir als starr geworden annehmen, d. h., wir ersetzen ihn im Geiste durch einen absolut starren Stab AB. Nach dem Axiom II bestehen die Gleichgewichtsbedingungen dieses Stabes, der sich unter der Einwirkung zweier an seinen Enden angreifender Kräfte befindet, darin, daß diese zwei Kräfte der Größe nach gleich sein und auf der Geraden AB in entgegengesetzten Richtungen verlaufen müssen. Derselben Gleichgewichtsbedingung müssen auch die an den Enden unseres Fadens angreifenden Kräfte entsprechen. Aber diese für das Gleichgewicht des starren Stabes notwendige und hinreichende Bedingung ist noch nicht hinreichend für das Gleichgewicht des Fadens. Die an den Enden des Stabes angreifenden Kräfte vermögen ihn entweder zu dehnen oder zusammenzudrücken. Die zusätzliche Bedingung, der die an den Fadenenden an-

greifenden Kräfte entsprechen müssen, besteht darin, daß diese Kräfte den Faden dehnen, ihn aber nicht zusammendrücken können, daß sie also so verlaufen müssen, wie es die Abb. 25 zeigt. Unter der Einwirkung von Druckkräften ist ein Gleichgewicht des Fadens unmöglich.

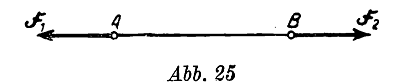


Abb. 25

Also erscheinen die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen des festen Körpers zugleich als die notwendigen aber nicht hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen des nichtstarren Körpers.

Aus dem Gesagten geht hervor, welche Bedeutung die Statik des starren Körpers für das Studium des Gleichgewichts, allgemein ausgedrückt, beliebiger nichtstarrer Körper hat. Die an dem nichtstarren Körper angreifenden Kräfte müssen zweierlei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen: die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers und zusätzlich noch Bedingungen, die von den physikalischen Eigenschaften des gegebenen Körpers abhängen.

KAPITEL II

DIE ADDITION VON KRÄFTEN, DIE AN EINEM PUNKTE ANGREIFEN UND IN EINER EBENE LIEGEN

§ 11. Das Kräfteparallelogramm. Das Kräftedreieck

Wir wenden uns jetzt der Untersuchung der Addition von Kräften zu, die an einem starren Körper angreifen. Wir zergliedern diese Aufgabe folgendermaßen: In den ersten Kapiteln (II bis VI) werden wir voraussetzen, daß alle gegebenen Kräfte in einer Ebene liegen. In den nachfolgenden Kapiteln (VII bis X) werden wir den Fall betrachten, bei dem die Kräfte nicht in einer Ebene liegen. Im vorliegenden Kapitel behandeln wir die Addition von Kräften, die in einer Ebene liegen und an einem Punkte angreifen.

Zu Beginn verweilen wir bei zwei Kräften, die an einem Punkte angreifen.

Nehmen wir an, daß an dem Punkte A eines starren Körpers zwei Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (Abb. 26) angreifen. Wir wissen bereits (§ 8), daß diese zwei Kräfte auf die Resultierende zurückgeführt werden, die an demselben Punkt A angreift und durch die Diagonale des aus den gegebenen Kräften konstruierten Parallelogramms dargestellt wird.

Das aus den gegebenen Kräften konstruierte Parallelogramm heißt *Kräfteparallelogramm*, und die dargelegte Regel zur Ermittlung der Resultierenden der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heißt Regel des Kräfteparallelogramms.

Wir bemerken, daß die Konstruktion des Kräfteparallelogramms auch durch folgende einfachere Konstruktion ersetzt werden kann.

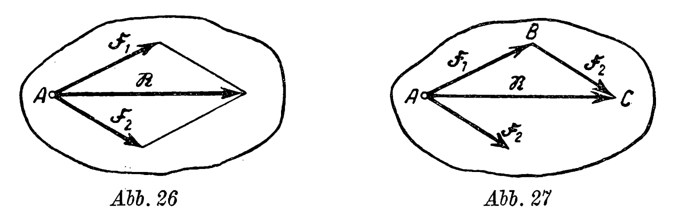


Abb. 26 *Abb. 27*

Nehmen wir erneut an, daß an dem Punkte A des starren Körpers die zwei Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (Abb. 27) angreifen. Vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}_1$ tragen wir den Vektor $\overline{BC}$ ab, der der Kraft $\mathfrak{F}_2$ gleich ist (d. h., er ist seinem absoluten Betrage nach gleich und parallel der Kraft $\mathfrak{F}_2$ und verläuft in derselben Richtung wie diese). Verbinden wir den Anfang A der Kraft $\mathfrak{F}_1$ mit dem Ende C des soeben konstruierten Vektors, so ist augenfällig, daß der Abschnitt AC die Resultierende $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte darstellt.

Das Dreieck ABC, das aus den Abschnitten zusammengestellt ist, die die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{R}$ darstellen, heißt *Kräftedreieck* und die gezeigte Konstruktionsregel heißt Regel des Kräftedreiecks.

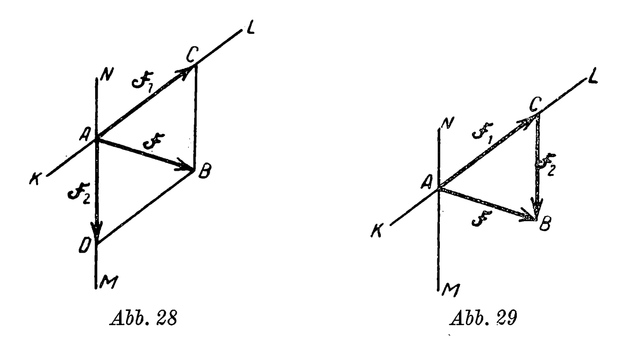


Abb. 28 *Abb. 29*

Nun muß die Aufmerksamkeit auf die Richtungsregel im Kräftedreieck gelenkt werden: Die Kräftekomponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ verlaufen in einer Richtung um das Kräftedreieck herum, während die Resultierende $\mathfrak{R}$ in entgegengesetzter Richtung verläuft.

Mit der Konstruktion des Kräfteparallelogramms oder des Kräftedreiecks läßt sich auch leicht die umgekehrte Aufgabe lösen, die Zerlegung einer gegebenen Kraft in zwei Komponenten, die an demselben Punkt angreifen und vorgegebene Wirkungslinien haben.

Nehmen wir an, die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkt A des starren Körpers angreift, (Abb. 28) sei gegeben.[1] Wir fordern nun, diese in zwei an demselben Punkt A angreifende Komponenten zu zerlegen, deren Wirkungslinien KL und MN gegeben sind. Vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}$ legen wir eine Gerade parallel zu MN bis zum Schnitt mit KL im Punkt C und eine Gerade parallel zu KL bis zum Schnitt mit MN im Punkte D. So erhalten wir das Parallelogramm $ABCD$, seine Seiten ergeben sowohl die Größen als auch die Richtungen der gesuchten Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$.

Um dieselbe Aufgabe mit Hilfe der Konstruktion des Kräftedreiecks zu lösen, führen wir vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}$ (Abb. 29) eine Gerade parallel zu MN bis zum Schnitt mit KL im Punkte C. So erhalten wir das Kräftedreieck ABC. Wir schreiben den Seiten AC und CB die Richtungen zu, die um das Dreieck herum und entgegengesetzt der Kraft $\mathfrak{F}$ verlaufen. Die Seiten AC und CB ergeben die Größen und die Richtungen der unbekannten Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$.

§ 12. Das Kräftepolygon. Die Gleichgewichtsbedingungen der an einem Punkt angreifenden Kräfte

Wir gehen jetzt zu der Behandlung einer beliebigen Anzahl von Kräften über, die an einem Punkte angreifen.

Nehmen wir an, daß im Punkte A die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ angreifen, die in einer Ebene liegen, die wir als unsere Abbildungsebene wählen (Abb. 30), und fordern wir die Addition dieser Kräfte. Wir beschränken uns auf die Betrachtung von vier Kräften, die an einem Punkte angreifen, und bemerken, daß unsere Überlegungen für jede beliebige Anzahl von Kräften richtig bleiben.

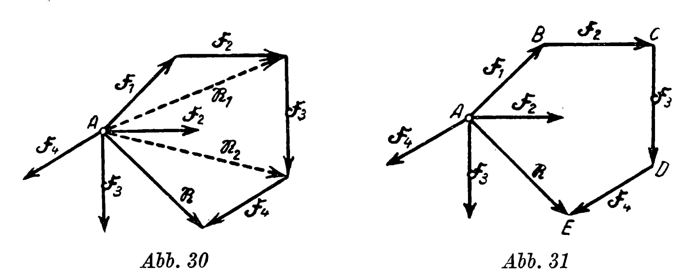


Abb. 30 *Abb. 31*

Wir addieren die uns gegebenen Kräfte nacheinander. Zuerst addieren wir die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, wobei wir nach der Dreiecksregel deren Resultierende $\mathfrak{R}_1$ ermitteln. Sodann addieren wir die Kräfte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ und finden, indem wir abermals ein Dreieck dieser Kräfte konstruieren, die Resultierende $\mathfrak{R}_2$.

Schließlich addieren wir die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{F}_4$ und finden die Resultierende $\mathfrak{R}$, die die gesuchte Resultierende aller gegebenen Kräfte ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß es für die Auffindung der Resultierenden der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ genügt, folgende Konstruktionen durchzuführen:

[1] Die Umrisse des Körpers sind sowohl hier als auch fernerhin in den Abbildungen nicht wiedergegeben, da sie ohne Bedeutung sind.

Vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}_1$ (Abb. 31) tragen wir den Vektor $\overline{BC}$ ab, der der Kraft $\mathfrak{F}_2$ gleich ist, sodann tragen wir vom Ende C des Vektors $\overline{BC}$ den Vektor $\overline{CD}$ ab, der der Kraft $\mathfrak{F}_3$ gleich ist, und fahren so fort, bis alle gegebenen Kräfte aneinander gesetzt sind. Wir erhalten so ein nichtgeschlossenes Vieleck (Polygon), $ABCDE$, das *Kräftevieleck* (*Kräftepolygon*) heißt. Nun verbinden wir Anfang und Ende des Kräftevielecks durch den Abschnitt AE und schreiben diesem Abschnitt den Verlauf vom Anfang A nach dem Ende E zu. Der Vektor $\overline{AE}$, der das Kräftevieleck schließt, ergibt sowohl die Größe als auch die Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte.

Die dargelegte Konstruktionsregel der Resultierenden $\mathfrak{R}$ heißt Regel des Kräftevielecks. Wir wenden die Aufmerksamkeit dem Umfahrungssinn im Kräftevieleck zu: Die Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ verlaufen in einer Richtung um das Kräftevieleck herum, während die Resultierende $\mathfrak{R}$ entgegengesetzt gerichtet ist.

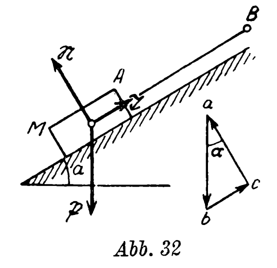


Abb. 32

Nach der Definition des Begriffs der Vektorensumme (§ 2) können wir das gewonnene Ergebnis folgendermaßen formulieren: Die Resultierende einer beliebigen Anzahl von Kräften, die an einem Punkte angreifen, greift an demselben Punkte an und ist gleich der Vektorensumme der gegebenen Kräfte. Dieses Ergebnis wird jeder Anzahl von gegebenen Kräften gerecht. Wenn uns n Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gegeben sind, können wir, indem wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ nennen und die übliche Schreibart der Addition von Vektoren anwenden, schreiben:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n .$$

Aus dem gewonnenen Ergebnis ist leicht die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte, die an einem Punkte angreifen, abzuleiten. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte heben sich gegenseitig auf, wenn ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ gleich Null ist. In diesem Fall trifft der letzte Punkt des Kräftevielecks mit dem ersten zusammen und das Kräftevieleck heißt dann *geschlossen*. Folglich besteht die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte, die an einem Punkte angreifen, darin, daß das Vieleck der gegebenen Kräfte geschlossen ist. Oder anders ausgedrückt, die an einem Punkte angreifenden Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn ihre vektorielle Summe gleich Null ist.

Wenden wir diese Gleichgewichtsbedingung bei der Rechnung einiger Aufgaben an.

Beispiel 1. Auf einer absolut glatten, unbeweglichen, schiefen Ebene, die mit dem Horizont den Winkel α bildet (Abb. 32), ruht der Körper M, den der Faden AB festhält. AB verläuft parallel zur schiefen Ebene und ist an dem unbeweglichen Punkt B befestigt. Das Gewicht des Körpers M ist gleich P. Die Zugkraft in dem Faden AB ist zu ermitteln.

Der Körper M befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung folgender drei Kräfte: des eigenen Gewichts $\mathfrak{P}$, der Reaktion $\mathfrak{N}$ der schiefen Ebene (die senkrecht zur schiefen Ebene verläuft) und der Reaktion $\mathfrak{T}$ des Fadens, die der Größe nach der unbekannten Fadenzugkraft gleich ist. Diese drei Kräfte betrachten wir als in einem Punkte angreifend (und zwar im Schwerpunkt des Körpers M). Folglich haben wir drei Kräfte,

die an einem Punkte angreifen und sich im Gleichgewicht befinden. Übereinstimmend mit dem oben Dargelegten, muß dieses Kräftevieleck geschlossen sein.

Wir konstruieren ein Kräftevieleck $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ und fordern, daß es geschlossen sei. Dazu tragen wir von einem beliebigen Punkte a den Vektor ab ab, der dem Gewicht des Körpers $\mathfrak{P}$ gleich ist. Sodann legen wir im Punkte b eine Gerade an, die parallel zur Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{T}$ verläuft, und durch den Punkt a eine Gerade parallel zur Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{N}$. Letztere zwei Geraden schneiden sich im Punkte c. Wir erhalten das geschlossene Vieleck abc, im vorliegenden Fall also ein rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten bc und ca dieses Vielecks geben die Größen der Kräfte $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ an. Wenn wir beachten, daß der Winkel an der Spitze gleich α ist, erhalten wir:

$$T = P \sin \alpha .$$

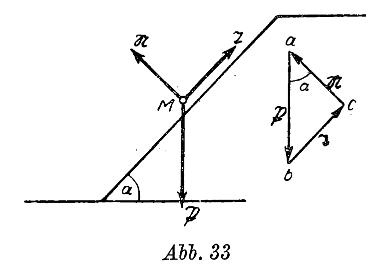


Abb. 33

Beispiel 2. Es ist der Winkel einer natürlichen Bodenböschung zu ermitteln, deren Reibungskoeffizient gleich 0,8 ist.

Der Winkel der natürlichen Böschung heißt der größte Winkel, den die Böschung eines Dammes mit der Horizontalen bilden kann. Er wird als größter Winkel der Neigung einer Dammböschung bestimmt, bei dem das Bodenteilchen M (Abb. 33), das sich auf der Dammböschung befindet, durch die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ im Gleichgewicht gehalten wird. Aus dieser Bedingung ist leicht die Größe des Winkels einer natürlichen Böschung zu bestimmen.

Das Bodenteilchen M befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung dreier Kräfte: seines Gewichts $\mathfrak{P}$, der Reaktion $\mathfrak{N}$ der geneigten Ebene der Böschung und der Reibungskraft $\mathfrak{T}$. Wir konstruieren das Vieleck der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ und fordern, daß es geschlossen sei. Dazu tragen wir von einem beliebigen Punkte a den Abschnitt ab ab, der der Größe nach der Kraft $\mathfrak{P}$ entspricht und parallel zu ihr liegt. Sodann legen wir in den Punkten b und a Geraden an, die entsprechend parallel den Wirkungslinien der Kräfte $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ sind. Wir erhalten so das geschlossene Kräftevieleck abc, in dem die Seiten bc und ca den Kräften $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ gleich sind. Bezeichnen wir den Winkel, den die Dammböschung mit der Horizontalen bildet, mit α und bemerken, daß im rechtwinkligen Dreieck abc der Winkel an der Spitze a ebenfalls gleich α ist, so folgern wir aus diesem Dreieck:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N}.$$

Andererseits wissen wir (§ 9), daß

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq f.$$

Dieser Bedingung muß der Winkel α entsprechen, damit das Gleichgewicht des Teilchens M, das sich auf der Dammböschung befindet, möglich wird. Der größte Wert des Winkels α ist eben der Winkel der natürlichen Böschung. Wenn wir den Winkel der natürlichen Böschung mit α_0 bezeichnen, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f.$$

Wenn wir hier $f = 0{,}8$ annehmen, dann ist $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}8$, woraus sich $\alpha_0 = 38° 40'$ ergibt.

Wir nannten Reibungswinkel (§ 9) einen Winkel, dessen Tangens dem Reibungskoeffizienten gleich ist. Folglich kann man das jetzt erhaltene Ergebnis so formulieren: Der Winkel der natürlichen Böschung ist gleich dem Reibungswinkel für den gegebenen Boden. Hieraus folgt, daß man den Reibungswinkel und also auch den Reibungskoeffizienten für einen beliebigen Boden bestimmen kann, indem man den Winkel der natürlichen Böschung ermittelt.

Beispiel 3. Die Stäbe AC und BC (Abb. 34) sind an den Punkten A und B an einer vertikalen Wand befestigt und im Punkte C miteinander verbunden. Der Stab AC verläuft horizontal und der Stab CB bildet mit der Horizontalen den Winkel α, die Verbindungen in den Punkten A, B und C sind gelenkig. An dem Gelenkbolzen C greift die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ an. Es sind die Kräfte in den Stäben AC und BC zu ermitteln.

Zuerst bemerken wir, daß unter der Einwirkung der Belastung $\mathfrak{P}$ die Stäbe AC und BC entweder gezogen oder gedrückt werden, biegende Kräfte können in ihnen nicht auftreten. Tatsächlich befindet sich der Stab AC unter der Einwirkung zweier Kräfte, die an seinen Enden von Seiten der Gelenkbolzen A und B angreifen. Da sich der Stab AC im Gleichgewicht befindet, müssen sich diese zwei Kräfte gegenseitig aufheben, d. h., sie müssen der Größe nach gleich sein und auf einer Geraden, auf der die Achse des Stabes AC liegt, in entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Infolgedessen werden diese Kräfte die Stäbe entweder ziehen oder drücken. Dasselbe kann man auch für den Stab BC überlegen.

Wir bemerken hier, daß dasselbe für alle Stäbe gilt, die zu einer beliebigen Konstruktion aus geraden, an ihren Enden gelenkig miteinander verbundenen Stäben gehören, wenn die Lasten an den Gelenkbolzen angreifen. Alle Stäbe einer solchen Konstruktion erfahren Zug- oder Druckkräfte, es treten keine verbiegenden Kräfte auf. Darin besteht das Prinzip des Brückenträgers. Einzelheiten hierüber werden im Kapitel VI behandelt.

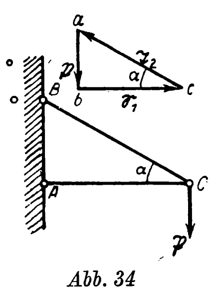


Abb. 34

Wenden wir uns jetzt dem Gelenkbolzen C zu. Der Gelenkbolzen C befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung dreier Kräfte: der gegebenen Last $\mathfrak{P}$ und den Reaktionen der Stäbe AC und BC.

Diese Reaktionen verlaufen auf den Geraden AC und BC und sind den Kräften gleich, die an den Enden der Stäbe AC und BC von Seiten des Gelenkbolzens C angreifen, und damit auch den unbekannten Stabkräften. Konstruieren wir ein Vieleck der erwähnten drei Kräfte und fordern, daß es geschlossen ist. Zu diesem Zweck tragen wir von einem beliebigen Punkte a den Abschnitt ab ab, der die Kraft $\mathfrak{P}$ darstellt, alsdann legen wir durch die Punkte b und a Geraden, die parallel zu den Geraden AC und BC verlaufen. Wir erhalten so das geschlossene Kräftevieleck abc, bei dem die Seiten bc und ca die Reaktionen der Stäbe AB und BC darstellen. Die Richtung dieser Reaktionen zeigt, daß der Stab AC gedrückt und der Stab BC gezogen wird. Wenn wir die Reaktionen der Stäbe AC und BC (oder, was das gleiche ist, die Kräfte in diesen Stäben) mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bezeichnen (wir erinnern daran, daß die Druckkräfte mit dem Buchstaben $\mathfrak{S}$ und die Zugkräftemit dem Buchstaben $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden), können wir aus dem Dreieck abc ablesen, daß

$$S_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \qquad T_2 = \frac{P}{\sin \alpha}$$

ist.

§ 13. Die Projektion von Kräften auf eine Gerade. Die Zerlegung der Kräfte in Richtung der Koordinatenachsen

Im § 4 ist die Definition der Projektion eines Vektors auf eine Gerade gegeben worden. Wenden wir jetzt die in diesem Paragraphen geäußerten Überlegungen auf den Begriff der Projektion von Kräften auf eine Gerade an. Gegeben sind die Kraft $\mathfrak{F}$, die im Punkt A angreift, und die x-Achse (Abb. 35), der wir die durch einen Pfeil angegebene Richtung zuschreiben. Durch den Punkt A führen wir die x'-Achse, die parallel und gleichgerichtet zur x-Achse verläuft. Vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}$ fällen wir eine Senkrechte Bb auf die x'-Achse. Die algebraische Größe des Abschnittes Ab, dem wir den Verlauf vom Punkt A nach dem Punkt b zuweisen, heißt die *Projektion der Kraft* $\mathfrak{F}$ auf die x-Achse; wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben X. Wir bewerten die Projektion X als positiv, wenn die Richtung des Abschnittes Ab mit dem Verlauf der x-Achse zusammenfällt, aber negativ im entgegengesetzten Falle.

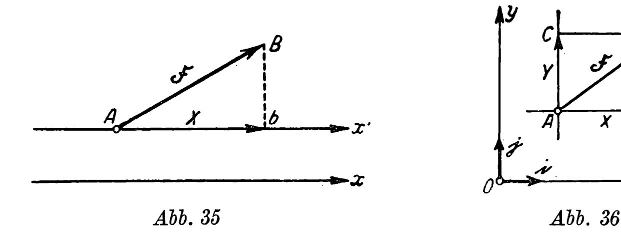


Abb. 35 *Abb. 36*

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABb folgt, daß

$$X = F\cos(\mathfrak{F}, x) \tag{1}$$

ist, wobei $(\mathfrak{F}, x)$ der Winkel ist, der zwischen der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ und der Richtung der x-Achse eingeschlossen ist. In Abbildung 35 ist die Projektion X positiv. Es ist leicht zu sehen, daß Gleichung (1) auch bei negativer Projektion X richtig ist. Wir bemerken, daß die Größe $\mathfrak{F}$ in Gleichung (1) immer positiv ist. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß $X > 0$, wenn $(\mathfrak{F}, x)$ ein spitzer Winkel ist, und $X < 0$, wenn $(\mathfrak{F}, x)$ ein stumpfer Winkel ist. Wenn $(\mathfrak{F}, x) = 0°$, d. h., wenn die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Richtung der x-Achse zusammenfällt, ist $X = \mathfrak{F}$. Ist jedoch $(\mathfrak{F}, x) = 180°$, d. h., ist die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ entgegengesetzt der x-Achse, so ist $X = - \mathfrak{F}$. Es ist wichtig, zu bemerken, daß $X = 0$ für $(\mathfrak{F}, x) = 90°$ ist. Also wird die Projektion der Kraft auf eine Gerade Null, wenn die Kraft senkrecht zur Geraden gerichtet ist.

Gegeben sei abermals die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkt A angreift (Abb. 36). Betrachten wir zwei zueinander senkrechte Achsen x und y und zerlegen die Kraft $\mathfrak{F}$ in zwei Komponenten, die parallel zu diesen Achsen gerichtet sind. Zu diesem Zweck legen wir durch den Punkt A zwei Geraden parallel zu den Achsen x und y und konstruieren aus diesen Geraden ein Rechteck, in dem die gegebene Kraft $\mathfrak{F}$ als Diagonale erscheint. Die Kräfte, die durch die Seiten dieses Rechtecks dargestellt werden, heißen die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Achsen x und y.

Eingedenk der Definition der Kraftprojektion schließen wir, daß die Größen der Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ (mit dem positiven oder negativen Vorzeichen je nach der Richtung dieser Komponenten) gleich den Projektionen der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Achsen x und y sind. Wir bezeichnen diese Projektionen mit X und Y. Andererseits (§ 3) sahen wir, daß jeder Vektor als Produkt seines absoluten Betrages mit dem entsprechenden Einheitsvektor dargestellt werden kann. Wir bezeichnen die einzelnen Einheitsvektoren, die längs der Achsen x und y gerichtet sind, mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$. In diesem Falle können wir die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ in Form der Produkte $X\mathfrak{i}$ und $Y\mathfrak{j}$ darstellen.

Da die Kraft $\mathfrak{F}$ der Summe ihrer Komponenten gleich ist, gilt

$$\mathfrak{F} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j}.$$

Diese Gleichung nennen wir *Zerlegung einer gegebenen Kraft in die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen.*

Man muß stets die wesentlichen Unterschiede zwischen den Kraftprojektionen und den Kraftkomponenten im Auge behalten: Die Kraftkomponenten erscheinen als Vektoren im Unterschied zu den Kraftprojektionen, die wir als Skalargrößen betrachten.

Wir zeigen jetzt, da wir die Kräfteprojektionen auf zwei zueinander senkrechte Achsen x und y kennen, daß es leicht ist, sowohl die Größe als auch die Richtung der Kraft zu bestimmen. In der Tat ist aus Abb. 36 ersichtlich, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ durch die Diagonale des Rechtecks dargestellt wird, dessen Seiten der Größe nach den Projektionen X und Y gleich sind. Hieraus folgt, daß

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

ist.

Weiterhin gelten für die Projektionen X und Y die Gleichungen

$$X = F\cos(\mathfrak{F}, x), \qquad Y = F\cos(\mathfrak{F}, y);$$

hieraus folgt:

$$\cos(\mathfrak{F}, x) = \frac{X}{F}; \qquad \cos(\mathfrak{F}, y) = \frac{Y}{F}. \tag{3}$$

Mit den Formeln (2) und (3) werden die Größe und die Kraftrichtung von $\mathfrak{F}$ bestimmt, wenn ihre Projektionen X und Y bekannt sind.

§ 14. Die Ermittlung der Resultierenden der an einem Punkte angreifenden Kräfte nach der Projektionsmethode

Wir benützen die Überlegungen, die am Ende des vorigen Paragraphen dargestellt sind, zur Bestimmung der Resultierenden der an einem Punkte angreifenden Kräfte.

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte A angreifen (Abb. 37). Es wird gefordert, Größe und Richtung ihrer Resultierenden $\mathfrak{R}$ rechnerisch zu ermitteln.

Wir betrachten zwei zueinander senkrechte Achsen x und y. Nach den Ausführungen am Schluß des vorigen Paragraphen läßt sich die Aufgabe lösen, wenn wir die Projektionen der Resultierenden $\mathfrak{R}$ auf die Achsen x und y ermitteln.

Wir wissen bereits, daß die Resultierende $\mathfrak{R}$ die Vektorensumme der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist. Andererseits ist in § 5 gezeigt worden, daß die Projektion der Vektorensumme auf eine beliebige Achse gleich der Summe der Projektionen der Komponenten auf dieselbe Achse ist. Hieraus schließen wir, daß die Projektion der Resultierenden $\mathfrak{R}$ auf irgendeine Achse gleich der Summe der Projektionen der Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf dieselbe Achse ist.

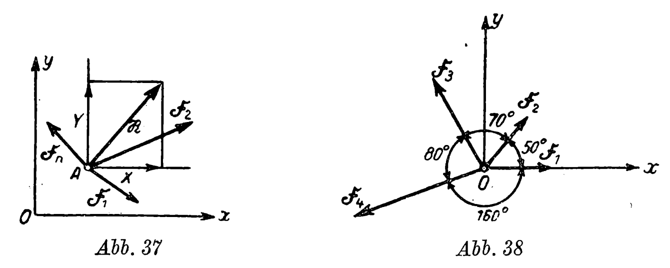


Abb. 37 *Abb. 38*

Folglich gilt, wenn wir die Projektionen der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf die Achsen x und y mit $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \ldots, X_n, Y_n$ und die Projektionen der Resultierenden $\mathfrak{R}$ auf dieselben Achsen mit X, Y bezeichnen:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Die hier enthaltenen Projektionen der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ lassen sich leicht mit Hilfe der Formeln

$$X_1 = F_1 \cos(\mathfrak{F}_1, x), \quad X_2 = F_2 \cos(\mathfrak{F}_2, x), \ldots, X_n = F_n \cos(\mathfrak{F}_n, x),$$

$$Y_1 = F_1 \cos(\mathfrak{F}_1, y), \quad Y_2 = F_2 \cos(\mathfrak{F}_2, y), \ldots, Y_n = F_n \cos(\mathfrak{F}_n, y)$$

ermitteln.

Manchmal werden diese Formeln gekürzt in folgender Form ausgedrückt:

$$X = \Sigma X_i,$$

$$Y = \Sigma Y_i,$$

wobei Σ das Zeichen der Summierung ist und X_i und Y_i die Projektionen der Kräfte $\mathfrak{F}_i$ auf die Achsen x und y bedeuten ($i = 1,2 \ldots, n$), d. h.

$$X_i = F_i \cos(\mathfrak{F}_i, x),$$

$$Y_i = F_i \cos(\mathfrak{F}_i, y).$$

In der gleichen Weise stellt sich die Summierung auch im weiteren dar.

Nachdem wir die Projektionen der Resultierenden X und Y berechnet haben, ermitteln wir nun die Größe und die Richtung der Resultierenden nach den Formeln

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos(\mathfrak{R}, x) = \frac{X}{R}, \cos(\mathfrak{R}, y) = \frac{Y}{R}.$$

Beispiel 4. Gegeben sind die Kräfte $\mathfrak{F}_1 = 10$ kg, $\mathfrak{F}_2 = 10$ kg, $\mathfrak{F}_3 = 15$ kg, $\mathfrak{F}_4 = 20$ kg, die an einem Punkte angreifen. Die Richtungen der Kräfte gehen aus Abb. 38 hervor: $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = 50°$, $(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3) = 70°$, $(\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4) = 80°$, $(\mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_1) = 160°$. Man ermittle die Resultierende dieser Kräfte. Wählen wir die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}_1$ als x-Achse und legen die y-Achse durch den Angriffspunkt der gegebenen Kräfte senkrecht zur x-Achse, wie in der Abb. 38 gezeigt ist.

Mit Hilfe trigonometrischer Tabellen ermitteln wir

$$X_1 = 10, \qquad Y_1 = 0,$$

$$X_2 = 10 \cos 50° = 6{,}428, \qquad Y_2 = 10 \cos 40° = 7{,}660,$$

$$X_3 = 15 \cos 120° = -7{,}500, \qquad Y_3 = 15 \cos 30° = 12{,}990,$$

$$X_4 = 20 \cos 160° = -18{,}794, \qquad Y_4 = 20 \cos 110° = -6{,}840.$$

Hieraus folgt:

$$X = -9{,}866, \qquad Y = 13{,}810,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 16{,}972 \text{ kg}.$$

Weiter folgt:

$$\cos(\mathfrak{R}, x) = \frac{X}{R} = -0{,}5813, \qquad \cos(\mathfrak{R}, y) = \frac{X}{R} = 0{,}8137,$$

und damit

$$(\mathfrak{R}, x) = 125° 32',5,$$

$$(\mathfrak{R}, y) = 35° 32',5.$$

§ 15. Die Gleichgewichtsgleichungen von Kräften, die an einem Punkte angreifen

Wenden wir die im vorigen Paragraphen erhaltenen Gleichungen auf den Fall an, daß die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sich gegenseitig aufheben. Im § 12 haben wir gesehen, daß sich die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewicht befinden, wenn ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ gleich Null ist. Aus der Gleichung

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

folgt jedoch, daß $R = 0$ ist, wenn $X = 0$ und $Y = 0$ sind.

Erinnern wir uns der Ausdrücke, die wir für die Projektionen X und Y der Resultierenden erhielten, so schließen wir, daß die an einem Punkte angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sich im Gleichgewicht befinden, wenn die Gleichungen

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \qquad Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0$$

erfüllt sind.

Diese Gleichungen heißen *Gleichgewichtsgleichungen* der Kräfte, die an einem Punkte angreifen.

In dem betrachteten Fall erhalten wir zwei Gleichgewichtsgleichungen. Mit ihrer Hilfe können wir die Aufgabe lösen, wenn die Anzahl der Unbekannten in der Aufgabe gleich zwei ist. Ist die Anzahl der Unbekannten in der Aufgabe jedoch größer als zwei, so werden die uns zur Verfügung stehenden Gleichungen nicht zur Bestimmung aller Unbekannten ausreichen. Die Aufgaben, die mit Hilfe der Gleichungen der Statik eines starren Körpers nicht gelöst werden können, heißen *statisch unbestimmt.* Für die Lösung solcher Aufgaben ist es erforderlich, Formänderungen oder Deformationen zu betrachten, die alle Körper unter dem Einfluß der angreifenden Kräfte erfahren. Die Methoden der Lösung statisch unbestimmter Aufgaben werden in der „Festigkeitslehre" dargelegt. Wir nennen die Aufgaben, die mit Hilfe der Gleichungen der Statik fester Körper lösbar sind, *statisch bestimmt.*

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Aufgabe, in der an einem Punkte angreifende und im Gleichgewicht befindliche Kräfte enthalten sind, statisch bestimmt ist, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich zwei ist.

Bei der Lösung von Aufgaben ist die zweckmäßige Wahl der Projektionsachsen wichtig. Die Auswahl dieser Achsen erfolgt, allgemein gesagt, nach folgender Regel: die Projektionsachsen müssen senkrecht zur Wirkungslinie einer der unbekannten Kräfte gerichtet werden. Hat man die Projektionsachsen in dieser Weise gewählt, so wird die unbekannte Kraft aus der entsprechenden Gleichgewichtsgleichung ausgeschlossen, und die Lösung der Gleichgewichtsgleichung vereinfacht sich.

Beispiel 5. Die Aufgabe Nr. 1 ist mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichung zu lösen.

Der Körper M (Abb. 39) befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung der Schwerkraft $\mathfrak{P}$, der Reaktion $\mathfrak{N}$ der schiefen Ebene und der Reaktion $\mathfrak{T}$ des Fadens. Als unbekannte Größen erscheinen die Reaktionen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$, d. h., die Aufgabe ist statisch bestimmt.

Wählen wir die Wirkungslinien der Kräfte $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ als Projektionsachsen x und y, deren Richtung entsprechend Abb. 39 verläuft. Indem wir die Kräfte $\mathfrak{T}, \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ auf diese Achsen projizieren, erhalten wir die Gleichgewichtsgleichungen

$$T + P\cos(90^\circ + a) = 0,$$

$$N + P\cos(180^\circ - a) = 0$$

oder

$$R - P\sin a = 0, \qquad N - P\cos a = 0,$$

woraus wir

$$T = P\sin a, \qquad N = P\cos a$$

erhalten.

Beispiel 6. Die unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigten Stäbe AC und BC sind an den Punkten A und B der horizontalen Wand befestigt und im Punkte C miteinander verbunden (Abb. 40). Die Verbindungen an den Punkten A, B und C sind gelenkig.

An dem Gelenkbolzen C greift die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ an. Die Kräfte in den Stäben AC und BC sollen ermittelt werden.

Der Gelenkbolzen C befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung der Last $\mathfrak{P}$ und der Reaktionen der Stäbe AC und BC. Diese Reaktionen haben die Richtungen der Geraden AC und BC und sind den gesuchten Kräften in den Stäben gleich, wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$.

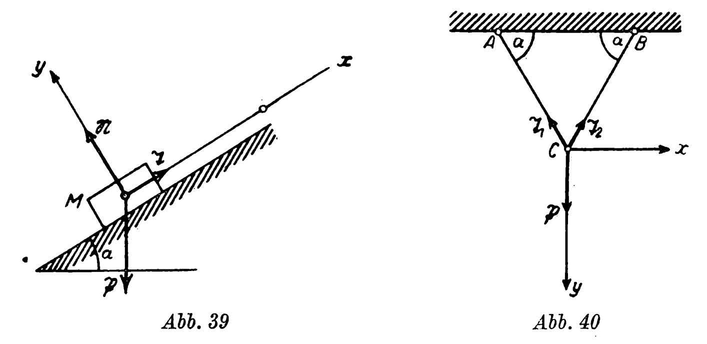


Abb. 39 *Abb. 40*

Wir wählen als x- und y-Achsen die horizontale und die vertikale Gerade, die durch den Punkt C geht, und legen ihre Richtung so fest, wie es Abb. 40 zeigt. Indem wir die Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ auf diese Achsen projizieren, erhalten wir die Gleichgewichtsgleichungen:

$$T_2 \cos\alpha + T_1 \cos(180° - \alpha) = 0\,,$$

$$P + T_1 \cos(90° + \alpha) + T_2 \cos(90° + \alpha) = 0\,,$$

oder

$$T_2 \cos\alpha - T_1 \cos\alpha = 0\,, \qquad P - T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0\,,$$

woraus wir

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

finden.

§ 16. Die Addition der auf einer Geraden wirkenden Kräfte

Wir nehmen an, daß an dem Punkte A (Abb. 41) die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ angreifen, die auf einer Geraden wirken, wobei die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nach der einen Seite und die Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ nach der anderen Seite gerichtet seien. Gefordert ist die Addition dieser Kräfte.

Wir benutzen das geometrische Verfahren zur Addition der an einem Punkte angreifenden Kräfte, d. h., wir lösen die Aufgabe durch die Konstruktion eines Kräftepolygons. Wir wissen, daß die Resultierende $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte an demselben

Punkt angreift. Zur Ermittlung von Größe und Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ konstruieren wir ein Vieleck der gegebenen Kräfte; die schließende Seite dieses Vielecks bestimmt sowohl Größe als auch Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$. Dieses Vieleck ist in Abb. 41 konstruiert. Im gegebenen Falle liegen sämtliche Seiten des Kräftevielecks auf einer Geraden. Der größeren Klarheit wegen sind in Abb. 41 die Seiten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und die Seiten $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{R}$ auf zwei parallelen Geraden dargestellt. Abb. 41 ist unter der Voraussetzung konstruiert, daß

$$F_1 + F_2 > F_3 + F_4$$

ist.

In diesem Falle gilt, wie aus der Abbildung ersichtlich,

$$R = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 .$$

Die Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ fällt mit der Richtung der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zusammen. Folglich ist *die Größe der Resultierenden der Kräfte, die auf einer Geraden wirken, gleich der algebraischen Summe der absoluten Beträge der gegebenen Kräfte, die mit den entsprechenden Vorzeichen versehen sind.*

Wäre jedoch

$$F_3 + F_4 > F_1 + F_2 ,$$

so würden wir

$$R = F_3 + F_4 - F_1 - F_2$$

erhalten, und die Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ fiele mit der Richtung der Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ zusammen.

Abb. 41

Die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ heben sich dann gegenseitig auf, wenn $R = 0$ ist oder

$$F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = 0 .$$

Somit heben sich die auf einer Geraden wirkenden Kräfte gegenseitig auf, wenn die algebraische Summe ihrer Größen gleich Null ist.

§ 17. Die Addition von Kräften, deren Wirkungslinien sich in einem Punkte schneiden

Diese Aufgabe wird unmittelbar auf die Addition der Kräfte zurückgeführt, die an einem Punkte angreifen. Es kommt lediglich darauf an, daß man den Angriffspunkt der gegebenen Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien nach dem gemeinsamen Schnittpunkt dieser Geraden verlegt.

Wir nehmen an, daß die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gegeben seien (Abb. 42). Die Wirkungslinien der gegebenen Kräfte schneiden sich im gemeinsamen Punkt A. Wir verlegen die Angriffspunkte aller gegebenen Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien nach dem Punkt A. Damit haben wir

erreicht, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an dem einen Punkte A angreifen. Durch Addition dieser Kräfte erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, die ebenfalls am Punkte A angreift und der Vektorensumme der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ (Abb. 42) gleich ist. Mithin ist *die Resultierende der Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkte schneiden, der Vektorensumme der gegebenen Kräfte gleich* und greift an dem gemeinsamen Schnittpunkt der Wirkungslinien der Kräfte an.

Die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ befinden sich im Gleichgewicht, wenn $\mathfrak{R} = 0$ ist. *Folglich heben sich die Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, gegenseitig auf, wenn die Vektorensumme der gegebenen Kräfte Null ist.*

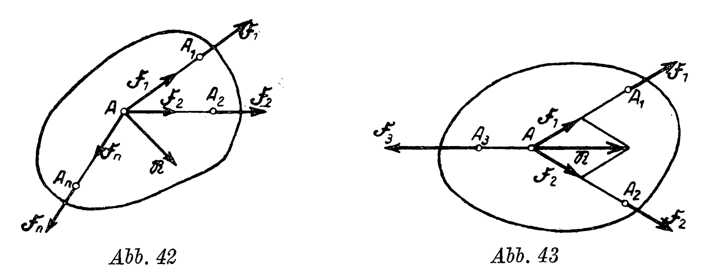


Abb. 42 Abb. 43

§ 18. Das Gleichgewicht dreier nicht paralleler Kräfte

Wir wollen folgenden Lehrsatz beweisen: *Drei in einer Ebene liegende Kräfte, die sich gegenseitig aufheben und nicht einander parallel sind, schneiden sich in einem Punkte.*

Wir nehmen an, daß an den Punkten A_1, A_2, A_3 die in einer Ebene gelegenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ (Abb. 43), die nicht parallel sind und sich gegenseitig aufheben, angreifen. Da die gegebenen Kräfte nicht parallel sind, schneiden sich zwei ihrer Wirkungslinien, z. B. die von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, in irgendeinem Punkte A. Wir verlegen die Angriffspunkte der zugeordneten Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ entlang ihrer Wirkungslinien nach dem Punkt A, wo wir diese Kräfte addieren.

Den Bedingungen gemäß befinden sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ im Gleichgewicht. Folglich muß die Kraft $\mathfrak{F}_3$ gleich der Resultierenden $\mathfrak{R}$ der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sein. Dies ist nur dann möglich, wenn die Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{R}$ der Größe nach gleich sind und auf einer Geraden nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Somit läuft die Wirkungslinie $\mathfrak{F}_3$ durch den Punkt A, was zu beweisen war.

Beispiel 7. Der vertikale Ständer eines Hebekrans (Abb. 44) stützt sich auf das Stützzapfenlager A und das Lager B; im Punkte C ist eine vertikale Last $\mathfrak{P} = 2$ t angehängt. Die Länge des Ständers AB beträgt 2 m, die Ausladung des Krans (d. h. die Entfernung des Punktes C von der Drehachse des Krans) ist gleich 4 m. Es sind die Auflagerreaktionen des Krans zu ermitteln.

Die Reaktion $\mathfrak{N}_1$ des Lagers B verläuft waagerecht, während die Reaktion $\mathfrak{N}_2$ des Stützzapfenlagers A sich aus der senkrechten und der waagerechten Komponente zusammensetzt und folglich zur Horizontalen geneigt ist.

Zur Bestimmung der Wirkungslinie der Reaktion $\mathfrak{N}_2$ benutzen wir den soeben bewiesenen Lehrsatz.

Da die drei Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sich gegenseitig aufheben und nicht parallel sind, müssen sie sich in einem Punkte schneiden. Konstruieren wir den Schnittpunkt M der Wirkungslinien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}_1$ und verbinden wir den Punkt M durch eine Gerade mit dem Punkte A. Die Gerade AM ist somit die unbekannte Wirkungslinie der Reaktion $\mathfrak{N}_2$.

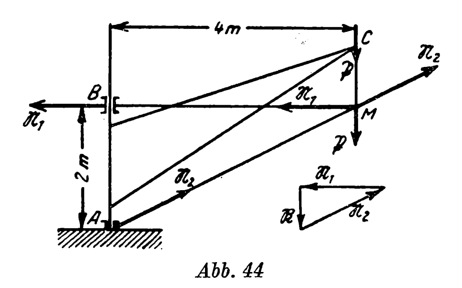


Abb. 44

Verlegen wir jetzt die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ entlang ihrer Wirkungslinien nach dem Punkte M. Wir erhalten drei Kräfte, die an einem Punkte angreifen und sich gegenseitig aufheben. Das Vieleck dieser Kräfte muß geschlossen sein. Wir konstruieren ein Vieleck der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ und bemerken, daß es dem Dreieck ABM ähnelt. Aus der Ähnlichkeit folgern wir

$$N_1 = P\frac{4}{2} = 4\,\mathrm{t}, \qquad N_2 = P\frac{\sqrt{20}}{2} = 4{,}472\,\mathrm{t}.$$

KAPITEL III

DIE ADDITION VON KRÄFTEPAAREN, DIE IN EINER EBENE LIEGEN

§ 19. Die Addition zweier nach einer Seite gerichteter paralleler Kräfte

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Addition in einer Ebene liegender und an einem Punkte angreifender Kräfte erörtert. Es obliegt uns nun, die Fälle zu untersuchen, in denen die gegebenen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen und beliebig in der gegebenen Ebene angeordnet sind. Später, im Kapitel IV, werden wir sehen, daß die Aufgabe der Addition solcher Kräfte auf zwei einfachere Aufgaben zurückgeführt werden kann, und zwar auf die Addition der an einem Punkte angreifenden Kräfte und die Addition der sogenannten Kräftepaare. Die erste dieser Aufgaben haben wir bereits kennengelernt. In diesem Kapitel werden wir die Addition der Kräftepaare behandeln.

Vorher jedoch verweilen wir bei der Frage der Addition von zwei parallelen Kräften, die an einem starren Körper angreifen.

An zwei Punkten A und B desselben starren Körpers (der in der Abbildung nicht dargestellt ist) greifen die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ an, die parallel und nach einer Seite gerichtet sind (Abb. 45). Diese Kräfte sollen addiert werden.

Wir verbinden die Punkte A und B durch eine Gerade und fügen an den Punkten A und B zwei gleichgroße Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ hinzu, die auf der Geraden AB nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Nach Axiom III haben wir das Recht, zwei derartige Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, hinzuzufügen).

Wir addieren die an dem Punkte A angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{S}_1$ nach der Regel des Kräfteparallelogramms und erhalten die Resultierende $\mathfrak{T}_1$. Entsprechend erhalten wir die Resultierende $\mathfrak{T}_2$, wenn wir die Kräfte $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{S}_2$, die an dem Punkte B angreifen, addieren. Wir verlängern die Wirkungslinien der Kräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bis zu ihrem gemeinsamen Schnittpunkt M und verlegen die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ entlang ihrer Wirkungslinien nach dem Punkte M. Durch Zerlegung der an dem Punkte M angreifenden Kraft $\mathfrak{T}_1$ in zwei Komponenten, die parallel den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{S}_1$ sind, erhalten wir die Komponenten, die den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{S}_1$ gleich sind (dies folgt aus der Gleichheit der Parallelogramme, die bei den Punkten A und M konstruiert sind). Entsprechend erhalten wir die Komponenten, die den Kräften $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ gleich sind, wenn wir die an dem Punkte M angreifende Kraft $\mathfrak{T}_2$ in zwei Komponenten zerlegen, die den Kräften $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ parallel sind.

Die beiden an dem Punkte M angreifenden Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ heben sich gegenseitig auf. Die im Punkte M angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ verlaufen auf einer Geraden in einer Richtung. Addieren wir diese beiden Kräfte, so erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, deren Größe gleich der Summe der beiden Größen ist:

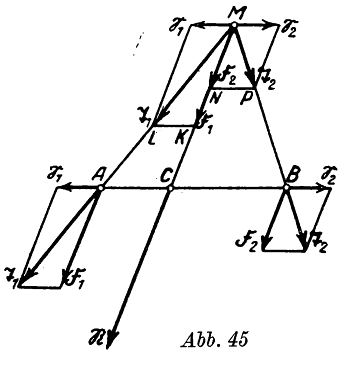


Abb. 45

$$R = F_1 + F_2,$$

und die auf derselben Geraden liegt und nach derselben Seite gerichtet ist.

Diese Kraft $\mathfrak{R}$ ist nun die Resultierende der gegebenen parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$.

Also haben die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ eine *Resultierende, die der Größe nach der Summe ihrer Größen gleich ist und mit ihnen parallel und in derselben Richtung verläuft.*

Wir verlängern die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{R}$ bis zum Schnittpunkt mit der Geraden AB im Punkte C und verlegen den Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{R}$ entlang ihrer Wirkungslinie nach dem Punkte C.

Wir bestimmen die Lage des Punktes C auf der Geraden AB. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MCA und MKL folgt:

$$\frac{AC}{S_1} = \frac{MC}{F_1} \quad \text{oder} \quad AC \cdot F_1 = MC \cdot S_1. \tag{1}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MCB und MNP folgt:

$$\frac{BC}{S_2} = \frac{MC}{F_2} \quad \text{oder} \quad BC \cdot F_2 = MC \cdot S_2. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ersehen wir, daß $S_1 = S_2$ ist, und schließen daraus:

$$AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2 \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{3}$$

Somit sind die Abschnitte AC und BC umgekehrt proportional den Größen F_1 und F_2. Folglich teilt der Punkt C die Strecke AB in zwei Abschnitte, die umgekehrt proportional den Größen der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind.

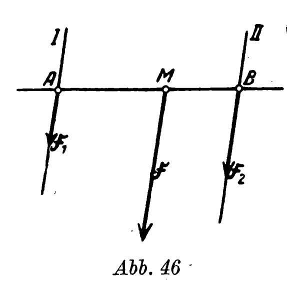


Abb. 46

Wir schreiben die Proportion folgendermaßen um:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}.$$

In der Proportion verhält sich jedes vorhergehende Glied zu seinem nachfolgenden wie die Summe der vorhergehenden Glieder zur Summe der nachfolgenden. Folglich ist

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_1 + F_2}.$$

Nun ist jedoch $AC + BC = AB$ und $F_1 + F_2 = R$. Folglich ist

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

Die Abschnitte AC und BC werden am einfachsten aus den letzten Gleichungen bestimmt. Wir erhalten:

$$AC = AB\frac{F_2}{R}, \qquad BC = AB\frac{F_1}{R}.$$

Mit Hilfe der erhaltenen Ergebnisse läßt sich die Zerlegung einer gegebenen Kraft in zwei Komponenten, die ihr parallel und nach derselben Seite gerichtet sind, leicht durchführen.

Wir nehmen an, daß die an dem Punkte M angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ gegeben sei (Abb. 46). Diese Kraft soll in zwei Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zerlegt werden, die auf den Geraden I und II wirken, die der Wirkungslinie der gegebenen Kraft parallel sind.

Wir legen durch den Punkt M eine Gerade, die die Geraden I und II in den Punkten A und B schneidet. Diese Punkte kann man als Angriffspunkte der un-

bekannten Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ansehen. Die Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ müssen die Gleichungen

$$F_1 + F_2 = F, \quad \frac{AM}{F_2} = \frac{BM}{F_1} = \frac{AB}{F}$$

befriedigen. Aus den letzteren Gleichungen finden wir:

$$F_1 = F\frac{BM}{AB}, \quad F_2 = F\frac{AM}{AB}.$$

§ 20. Die Addition zweier nach entgegengesetzten Seiten gerichteter Kräfte

An den Punkten A und B eines starren Körpers greifen die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ an, die parallel und einander entgegengesetzt gerichtet sind (Abb. 47). Diese Kräfte sollen addiert werden.

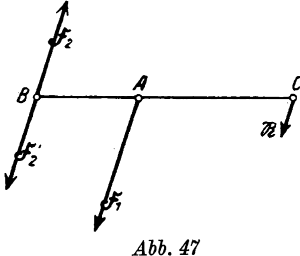


Abb. 47

Wir nehmen an, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ der Größe nach nicht gleich sind (der Fall der gleichgroßen Kräfte wird im nächsten Paragraphen betrachtet werden). Weiterhin möge $F_1 > F_2$ sein.

Wir zerlegen die Kraft $\mathfrak{F}_1$ in zwei Komponenten, die ihr parallel und nach der gleichen Seite gerichtet sind und bezeichnen diese Komponenten mit $\mathfrak{F}_2'$ und $\mathfrak{R}$. Die Größe der Komponente $\mathfrak{F}_2'$ wählen wir gleich der Größe der Kraft $\mathfrak{F}_2$ und legen diese Komponente im Punkte B an. Die Größe der zweiten Komponente $\mathfrak{R}$ und ihr Angriffspunkt C werden aus den Bedingungen

$$F_1 = F_2' + R,$$

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2'} = \frac{BC}{F_1}$$

gewonnen. Da wir wissen, daß $F_2' = F_2$ ist, erhalten wir also:

$$R = F_1 - F_2, \tag{1}$$

$$AC = AB\frac{F_2}{R}, \qquad BC = AB\frac{F_1}{R}. \tag{2}$$

Zwei der Größe nach gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die am Punkt B angreifen, heben sich jedoch gegenseitig auf. Es bleibt die Kraft $\mathfrak{R}$ übrig, die nun die unbekannte Resultierende der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist.

Wir sehen, daß auch in diesem Falle die Abschnitte AC und BC umgekehrt proportional den Größen der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind.

§ 21. Das Kräftepaar. Das Moment des Kräftepaares

Ein System von zwei der Größe nach gleichen parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die an einem starren Körper angreifen, heißt ein *Kräftepaar* (Abb. 48).

Der Begriff des Kräftepaares ist von POINSOT[1] in die Wissenschaft eingeführt worden.

Wenn wir $F_1 = F_2$ in die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen einsetzen, erhalten wir:

$$R = 0, \qquad AC = \infty, \qquad BC = \infty.$$

Hieraus schließen wir, daß ein Kräftepaar keine Resultierende besitzt.

Außerdem befinden sich die Kräfte, die ein Kräftepaar bilden, (gemäß Axiom II) nicht im Gleichgewicht. Folglich stellt das Kräftepaar das Beispiel eines Systems dar, dessen Kräfte sich nicht im Gleichgewicht befinden und die keine Resultierende haben.

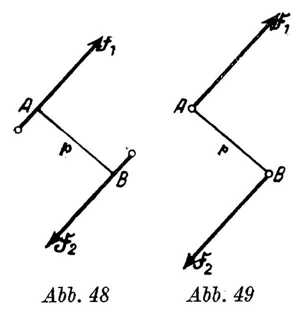


Abb. 48 *Abb. 49*

Der Abstand zwischen den Wirkungslinien der Kräfte des Kräftepaares heißt *Arm des Kräftepaares*. Wir bezeichnen ihn mit dem Buchstaben p. Das *Moment des Kräftepaares* heißt das mit dem Plus- oder Minuszeichen versehene Produkt aus der Größe einer der Kräfte und dem Arme.

Nehmen wir $F_1 = F_2 = F$ an und bezeichnen das Moment des Kräftepaares mit dem Buchstaben m, so gilt:

$$m = \pm F p.$$

Das entsprechende Vorzeichen in dieser Formel wird nach folgender Regel bestimmt: Ist ein Kräftepaar bestrebt, die Ebene der Zeichnung entgegengesetzt dem Uhrzeigerdrehsinn zu drehen, so ist das Moment des Kräftepaares positiv, im entgegengesetzten Fall ist es negativ.

Wir bemerken, daß die Kräfte eines Kräftepaares sich in dem besonderen Fall gegenseitig aufheben, wenn der Hebelarm p gleich Null ist. In diesem Fall ist auch das Moment gleich Null.

Weiterhin bemerken wir noch, daß man durch Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft des Kräftepaares entlang ihrer Wirkungslinie immer erreichen kann, daß die die Angriffspunkte A und B verbindende Gerade senkrecht zu den Wirkungslinien der Kräfte des Kräftepaares steht (Abb. 49). Dann ist der Abschnitt AB der Arm des Kräftepaares. Im weiteren werden wir immer annehmen, daß die Gerade, die die Angriffspunkte des Kräftepaares verbindet, senkrecht zu den Wirkungslinien dieser Kräfte steht.

Wie man aus der Definition selbst sieht, ist das Moment des Kräftepaares eine Größe, die die Dimension einer Kraft, multipliziert mit der einer Länge, besitzt. Wenn die ein Kräftepaar bildenden Kräfte in *Kilogramm* ausgedrückt sind, der Hebelarm

[1] L. Poinsot, Eléments de statique. Die erste Ausgabe der Werke von Poinsot erschien 1803.

des Kräftepaares aber in *Metern*, wird das Moment in *Kilogrammeter* ausgedrückt. Ist z. B. jede der ein Kräftepaar bildenden Kräfte gleich 10 kg und der Hebelarm des Kräftepaares gleich 2 m, wobei der Drehsinn des Kräftepaares dem Uhrzeiger folgt, so ist das Moment des Kräftepaares

$$m = -20\,\mathrm{m\,kg}.$$

Auf diese Weise erhalten wir als Einheit des Moments das *Meterkilogramm* d. h. das Moment eines Kräftepaares, das aus zwei Kräften von je 1 kg besteht, die an den Enden eines 1 m langen Armes angreifen.

§ 22. Die Äquivalenzbedingungen der Kräftepaare

In diesem Paragraphen werden wir eine bemerkenswerte Eigenschaft des Kräftepaares zeigen, die der Theorie der Addition der Kräftepaare zugrunde liegt. Diese

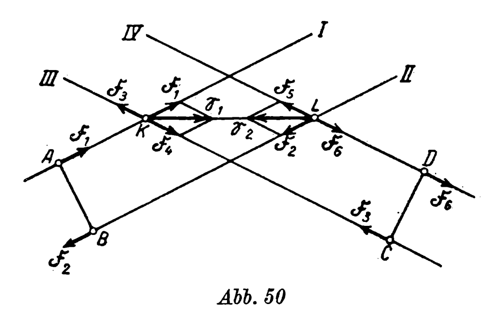


Abb. 50

Eigenschaft besteht darin, daß man, ohne das Gleichgewicht zu stören, immer jedes gegebene Kräftepaar durch ein anderes Kräftepaar ersetzen kann, dessen Moment dem Moment des gegebenen Kräftepaares gleich ist. Mit anderen Worten, wir werden zeigen, daß *zwei Kräftepaare, deren Momente gleich sind, statisch äquivalent sind.*

Bevor wir diese Äquivalenzbedingung der Kräftepaare beweisen, wenden wir uns folgendem Hilfssatz zu:

Hilfssatz: *Man kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, das gegebene Kräftepaar nach einem beliebigen Ort seiner Ebene verlegen.*

Gegeben ist ein Kräftepaar, das aus den gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mit dem Arm AB besteht (Abb. 50).

Betrachten wir den beliebig gelegenen Abschnitt $CD = AB$ und zeigen, daß man, ohne das Gleichgewicht zu stören, das gegebene Kräftepaar so verlagern kann, daß sein Arm mit dem Abschnitt CD zusammenfällt.

Wir ziehen die Wirkungslinien I und II der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und errichten an den Punkten C und D die Senkrechten III und IV zum Abschnitt CD. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden I und III mit K und den Schnittpunkt der Geraden II und IV mit L.

Wir verschieben jetzt die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ entlang ihrer Wirkungslinien I und II nach den Punkten K und L. Sodann ordnen wir an den Punkten K und L die sich gegenseitig aufhebenden und entsprechend auf den Geraden III und IV verlaufenden Kräfte $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_5$ und $\mathfrak{F}_6$ an, die den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gleich sind. Wir addieren die Kraft $\mathfrak{F}_1$, die an dem Punkte K angreift, und die Kraft $\mathfrak{F}_4$.

Aus den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_4$ konstruieren wir ein Parallelogramm (im gegebenen Falle einen Rhombus) und erhalten ihre Resultierende $\mathfrak{S}_1$. Entsprechend erhalten wir die Resultierende $\mathfrak{S}_2$, indem wir die an dem Punkte L angreifende Kraft $\mathfrak{F}_2$ und die Kraft $\mathfrak{F}_5$ addieren.

Da die bei den Punkten K und L konstruierten Parallelogramme gleich sind, ist folglich $S_1 = S_2$. Weiterhin halbiert die Kraft $\mathfrak{S}_1$ (als Diagonale des Rhombus) den Winkel zwischen den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_4$, und die Gerade KL halbiert (als Diagonale des aus den Geraden I, II, III und IV gebildeten Rhombus) diesen Winkel ebenfalls.

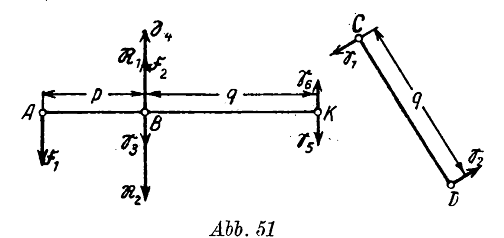


Abb. 51

Hieraus folgt, daß die Kraft $\mathfrak{S}_1$ auf der Geraden KL verläuft. Genauso überzeugen wir uns, daß auch die Kraft $\mathfrak{S}_2$ auf derselben Geraden KL verläuft. Also sind die Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ der Größe nach gleich und wirken auf einer Geraden in entgegengesetzten Richtungen und heben sich folglich gegenseitig auf. Es verbleiben noch die Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_6$, die auf den Geraden III bzw. IV wirken. Wir verschieben die Angriffspunkte dieser Kräfte entlang der Geraden III und IV nach den Punkten C und D.

Mit Hilfe dieser Konstruktion ist also das gegebene Kräftepaar nach dem erforderlichen Ort verlegt worden.

Wir gehen jetzt zur Beweisführung der oben gezeigten Äquivalenzbedingung der Kräftepaare über.

Satz: *Zwei Kräftepaare, deren Momente gleich sind, sind statisch äquivalent.*

Gegeben sind die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ mit dem Arm AB sowie $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit dem Arm CD (Abb. 51).

Wir setzen voraus, daß die Momente dieser Kräftepaare gleich sind (d. h., sie haben die gleichen Werte), und beweisen, daß die Kräftepaare statisch äquivalent sind (d. h., eines der Kräftepaare kann durch das andere ersetzt werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird).

Wir nehmen an, daß $F_1 = F_2 = F$, $S_1 = S_2 = S$ ist, und bezeichnen $AB = p$, $CD = q$. Bezeichnen wir die Momente der gegebenen Kräftepaare mit m_1 und m_2, so gilt:

$$m_1 = F \cdot p, \qquad m_2 = S \cdot q,$$

wobei in Übereinstimmung mit der Abbildung (Abb. 51) beide Momente positiv sind.[1]

Gemäß der Bedingung ist $m_1 = m_2$, d. h.

$$F \cdot p = S \cdot q. \tag{1}$$

Wir messen vom Punkte B auf der Fortsetzung des Abschnittes AB den Abschnitt $BK = CD = q$ und legen an den Punkten B und K die sich gegenseitig aufhebenden Kräfte $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$ an, die $\mathfrak{S}$ gleichwertig sind ($\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_6 = \mathfrak{S}$) und senkrecht zu der Geraden BD verlaufen.

Addieren wir die an dem Punkte B angreifende Kraft $\mathfrak{F}_2$ und die Kraft $\mathfrak{S}_4$, so erhalten wir die Resultierende $\mathfrak{R}_1$, die der Größe nach $F + S$ gleich ist, an dem Punkte B angreift und, senkrecht zur Geraden AK gerichtet, in derselben Richtung verläuft wie die Kraft $\mathfrak{S}_4$.

Wir addieren ebenso die an dem Punkte A angreifende Kraft $\mathfrak{F}_1$ und die Kraft $\mathfrak{S}_5$ und erhalten die Resultierende $\mathfrak{R}_2$, die ebenfalls gleich $F + S$ ist, senkrecht zur Geraden AK in derselben Richtung wie die Kraft $\mathfrak{S}_5$ verläuft und an dem Punkte angreift, der die Strecke AK in zwei Abschnitte teilt, die umgekehrt proportional den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{S}_5$, oder, was dasselbe ist, den Kräften $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{S}$, sind. Der Abschnitt AK wird jedoch in zwei Teile geteilt, die umgekehrt proportional den Kräften $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{S}$ im Punkte B sind, da gemäß Bedingung (1) gilt:

$$\frac{AB}{BK} = \frac{p}{q} = \frac{S}{F}.$$

Folglich greift auch die zweite Resultierende $\mathfrak{R}_2$ an dem Punkte B an. Somit greifen an dem Punkte B zwei der Größe nach gleiche Kräfte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ an, die auf einer Geraden liegen, entgegengesetzt gerichtet sind und sich gegenseitig aufheben.

Es verbleiben noch die Kräfte $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_6$, die ein Kräftepaar mit dem Arm BK bilden.

Also ist das gegebene Kräftepaar $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ mit dem Arm AB durch das Kräftepaar $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_6$ mit dem Arm BK ersetzt worden. Auf Grund des Hilfssatzes kann dieses letzte Kräftepaar so verlegt werden, daß sein Arm mit dem Abschnitt CD zusammenfällt. Danach erweist sich das gegebene Kräftepaar $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ mit dem Arm AB als durch das Kräftepaar $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit dem Arm CD ersetzt, d. h., die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ sind statisch äquivalent.

§ 23. Die Addition der Kräftepaare. Die Gleichgewichtsbedingungen der Kräftepaare

Gegeben sind die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1'$; $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2'$; $\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_3'$ und $\mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_4'$ mit den Armen p_1, p_2, p_3 und p_4 (Abb. 52). Die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$ und $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$ sind bestrebt, die Abbildungsebene dem Uhrzeigerdrehsinn entgegen, die Kräftepaare $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3'$ und

[1] Wir schlagen dem Leser vor, sich davon zu überzeugen, daß der bewiesene Satz auch dann richtig ist, wenn die Momente beider gegebener Kräftepaare negativ sind.

$\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_4'$ im Uhrzeigerdrehsinn zu drehen. Wenn wir die Momente dieser Kräftepaare mit m_1, m_2, m_3 und m_4 bezeichnen, gilt

$$m_1 = F_1 p_1, \qquad m_2 = F_2 p_2,$$

$$m_3 = -F_3 p_3, \qquad m_4 = -F_4 p_4.$$

Betrachten wir einen beliebigen Abschnitt $AB = d$ und verschieben die gegebenen Kräftepaare nach dem Arm d, d. h., wir ersetzen die gegebenen Kräftepaare durch die

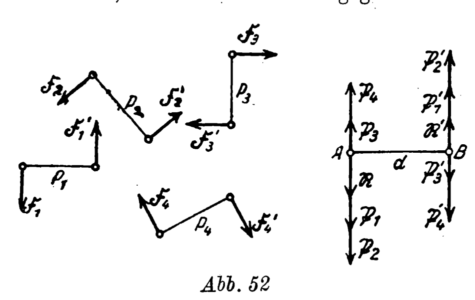


Abb. 52

ihnen äquivalenten Kräftepaare $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1'; \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2'; \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_3'$ und $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_4'$ mit dem Arm d. Die Größen der Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$ bestimmen wir aus den Gleichungen

$$m_1 = P_1 d; \quad m_2 = P_2 d; \quad m_3 = -P_3 d; \quad m_4 = -P_4 d.$$

Wir addieren die an dem Punkte A angreifenden Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$. Diese Kräfte verlaufen auf einer Geraden. Vorausgesetzt, daß $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$ ist, erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, deren Größe

$$R = P_1 + P_2 - P_3 - P_4$$

ist und die auf derselben Geraden in derselben Richtung wie die Kraft $\mathfrak{P}_1$ verläuft. Wir addieren weiter die Kräfte $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \mathfrak{P}_3'$ und $\mathfrak{P}_4'$, die an dem Punkte B angreifen. Ihre Resultierende $\mathfrak{R}'$ ist der Größe nach gleich der Kraft $\mathfrak{R}$, die an dem Punkt A angreift. Sie verläuft parallel zu ihr in entgegengesetzter Richtung.

Also werden die gegebenen Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1'; \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2'; \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_3'$ und $\mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_4'$ auf ein Kräftepaar $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ zurückgeführt, das *resultierendes Kräftepaar* heißt.

Wir zeigen, daß *das Moment des resultierenden Kräftepaares gleich der Summe der Momente der beteiligten Kräftepaare* ist.

Wenn wir das Moment des resultierenden Kräftepaares mit m bezeichnen, gilt

$$m = R \cdot d = (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) d = P_1 d + P_2 d - P_3 d - P_4 d$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

Wir setzen voraus, daß $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$ ist. Man kann sich leicht überzeugen, daß sich das erhaltene Resultat auch für $P_1 + P_2 < P_3 + P_4$ nicht verändert.

Ist $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$, so befinden sich die an den Punkten A und B angreifenden Kräfte und folglich auch die ihnen äquivalenten Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1'$; $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2'$; $\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_3'$ und $\mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_4'$ im Gleichgewicht.

In diesem Fall ist $\mathfrak{R} = 0$; folglich ist

$$m = 0 \quad \text{und} \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Somit *heben sich die gegebenen Paare gegenseitig auf, wenn die Summe ihrer Momente gleich Null ist.* Darin besteht die Gleichgewichtsbedingung der Kräftepaare.

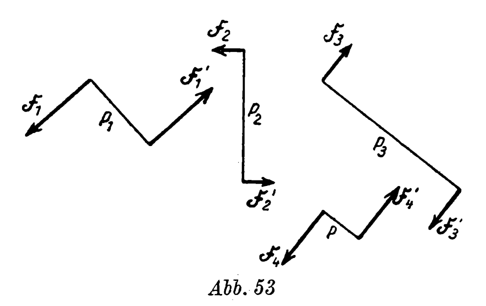


Abb. 53

Die erhaltenen Ergebnisse bleiben richtig bei jeder beliebigen Anzahl von gegebenen Kräftepaaren. Wenn uns n Kräftepaare mit den Momenten $m_1, \ldots, m_n$ gegeben sind, werden sie zu einem resultierenden Kräftepaar zusammengesetzt, dessen Moment m

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

ist. Natürlich muß das Moment jedes einzelnen beteiligten Kräftepaares in dieser Summe mit dem Vorzeichen versehen sein, das durch die Drehrichtung des gegebenen Kräftepaares bestimmt wird. Das Gleichgewicht der Kräftepaare besteht dann, wenn

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 0$$

ist.

Beispiel 8. Gegeben sind die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1'$; $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2'$; $\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_3'$ (Abb. 53); $F_1 = F_1' = 5$ kg, $F_2 = F_2' = 2$ kg, $F_3 = F_3' = 3$ kg, sowie die Arme $p_1 = 20$ cm, $p_2 = 30$ cm, $p_3 = 40$ cm. Es wird die Addition dieser Kräftepaare gefordert.

Wir bestimmen das Moment des resultierenden Kräftepaares:

$$m = 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - 3 \cdot 40 = 40 \text{ cm kg}.$$

Als resultierendes Kräftepaar kann man ein beliebiges Kräftepaar $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ mit dem Arm p wählen, dessen Moment $m = 40$ cm kg ist. Zum Beispiel:

$$F = 2 \text{ kg}, \quad p = 20 \text{ cm},$$
$$F = 4 \text{ kg}, \quad p = 10 \text{ cm},$$
$$F = 10 \text{ kg}, \quad p = 4 \text{ cm} \quad \text{usw.}$$

Beispiel 9. Die Größe der Kraft $\mathfrak{F}_3$ des Kräftepaares $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3'$ im vorigen Beispiel ist so zu verändern, daß sich die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$; $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$; $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3'$ im Gleichgewicht befinden.

Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - F_3 \cdot 40 = 0\,,$$

woraus folgt:

$$F_3 = 4\,\text{kg}\,.$$

KAPITEL IV

DIE ADDITION VON KRÄFTEN, DIE BELIEBIG IN EINER EBENE LIEGEN

§ 24. Das Kräftemoment in bezug auf einen Punkt

Bei der Behandlung der Addition von Kräften, die beliebig in einer Ebene liegen, verweilen wir zunächst beim Begriff des Drehmomentes bezüglich irgendeines Punktes.

Gegeben seien die Kraft $\mathfrak{F}$ und der Punkt O (Abb. 54). Wir fällen das Lot vom Punkte O auf die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$. Dieses Lot nennen wir den *Hebelarm der Kraft* $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O, die Länge des Armes bezeichnen wir mit dem Buchstaben p. Das *Moment der Kraft* $\mathfrak{F}$ in bezug auf den Punkt O ist das mit dem Plus- oder Minuszeichen versehene Produkt aus der Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ und der Länge des Armes p. Wenn wir das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ mit dem Symbol $m(\mathfrak{F})$ bezeichnen, gilt:

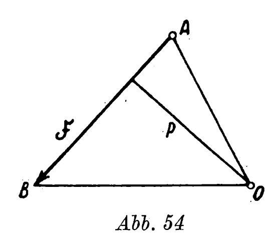


Abb. 54

$$m(\mathfrak{F}) = \pm F \cdot p\,.$$

Das Vorzeichen in dieser Formel wird nach folgender Regel bestimmt: Ist die Kraft $\mathfrak{F}$ bestrebt, die Abbildungsebene um den Punkt O entgegengesetzt dem Uhrzeigerdrehsinne zu drehen, so setzen wir vor das Moment das Pluszeichen, im anderen Fall das Minuszeichen.

Der Punkt O heißt *Drehpunkt des Momentes.*

Das Produkt $F \cdot p$ ist gleich der doppelten Fläche des Dreiecks AOB (Abb. 54). Folglich können wir das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ in bezug auf den Punkt O noch folgendermaßen ausdrücken:

$$m(\mathfrak{F}) = \pm 2 \triangle AOB\,.$$

Wir beachten einen wichtigen Spezialfall. Es gilt, wenn $p = 0$ ist, $m(\mathfrak{F}) = 0$, d. h., das Drehmoment bezüglich des Punktes ist gleich Null, wenn die Wirkungslinie der Kraft durch den Drehpunkt des Moments verläuft.

Wir bemerken noch, daß das Drehmoment ebenso wie das Moment des Kräftepaares eine Größe ist, die die Dimension einer Kraft, multipliziert mit einer Länge besitzt. Wird die Kraft in *Kilogramm* ausgedrückt und die Länge des Hebelarmes in *Meter*, so erhalten wir das Drehmoment in *Meterkilogramm*.

§ 25. Die Reduktion der Kraft auf einen gegebenen Punkt

Gegeben sei die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkte A angreift (Abb. 55). Wir betrachten einen beliebigen Punkt O und legen an ihn zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte, von denen die eine der Kraft $\mathfrak{F}$ (diese Kraft ist in Abbildung 55 durch zwei Querstriche gekennzeichnet) gleich ist, während die andere (wir bezeichnen sie mit $-\mathfrak{F}$) der Größe nach der Kraft $\mathfrak{F}$ gleich ist und parallel zu ihr nach der entgegengesetzten Seite verläuft.

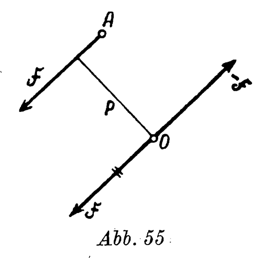


Abb. 55

Die gegebene Kraft $\mathfrak{F}$ ist durch die an dem Punkt O angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ (in der Abbildung mit zwei Querstrichen bezeichnet) und durch das Kräftepaar $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$ ersetzt.

Folglich kann man auf die gezeigte Weise den Angriffspunkt der gegebenen Kraft nach einem beliebigen Punkt verlegen, indem man ein Kräftepaar hinzufügt. Den Ersatz der an dem Punkte A angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ durch die an dem Punkt O angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ (mit zwei Querstrichen bezeichnet) und das Kräftepaar $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$ nennen wir *Reduktion der gegebenen Kraft* $\mathfrak{F}$ *auf den Punkt* O. Das Kräftepaar $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$, das wir bei der Reduktion der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Punkt O erhalten, nennen wir *angegliedertes Kräftepaar*.

Wir wollen das Moment des angegliederten Kräftepaares $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$ ermitteln. Indem wir eine Senkrechte vom Punkte O auf die Wirkungslinie der im Punkte A angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ fällen, erhalten wir den Arm p des Kräftepaares, dessen Moment gleich

$$m = F \cdot p$$

ist (als Vorzeichen des Momentes wählen wir das Pluszeichen, entsprechend Abb. 55). Das Produkt $F \cdot p$ ist jedoch bezüglich des Punktes O ebenfalls gleich dem Moment der gegebenen, an dem Punkte A angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$. Folglich erhalten wir, wenn wir dieses Moment mit demselben Vorzeichen versehen:

$$m = m(\mathfrak{F}),$$

d. h., *das Moment des angegliederten Kräftepaares, das wir bei der Reduktion der Kraft* $\mathfrak{F}$ *auf den Punkt* O *erhalten, ist gleich dem Moment der gegebenen Kraft* $\mathfrak{F}$ *in bezug auf den Punkt* O.

§ 26. Die Reduktion von Kräftesystemen, die beliebig in einer Ebene liegen, auf eine Kraft und ein Kräftepaar. Hauptvektor und Hauptmoment

Wir wenden uns jetzt der Addition von Kräften zu, die beliebig in einer Ebene liegen.

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen (Abb. 56). Diese Kräfte sollen addiert werden.

Indem wir dem Beispiel Poinsots (s. S. 40) folgen, benutzen wir das Verfahren der Reduktion aller Kräfte auf einen Punkt. Wir betrachten einen beliebigen Punkt O, den wir das *Reduktionszentrum* nennen, und reduzieren alle gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den Punkt O, wie es im vorherigen Paragraphen erläutert worden ist.

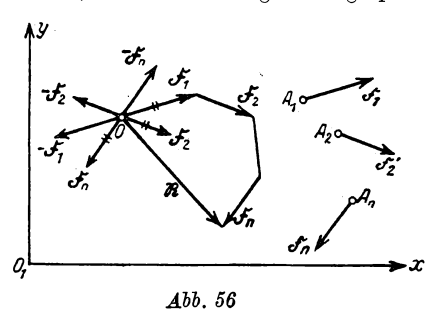


Abb. 56

Als Ergebnis dieser Reduktion erhalten wir die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte O angreifen und in Abb. 56 mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, und die angegliederten Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, -\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2, -\mathfrak{F}_2; \ldots; \mathfrak{F}_n, -\mathfrak{F}_n$. Die Momente dieser Kräftepaare $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sind gemäß dem oben Gesagten gleich den Momenten der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich des Punktes O, d. h.

$$m_1 = m(\mathfrak{F}_1),$$
$$m_2 = m(\mathfrak{F}_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_n = m(\mathfrak{F}_n),$$

wobei $m(\mathfrak{F}_1), m(\mathfrak{F}_2), \ldots, m(\mathfrak{F}_n)$ die Momente der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O sind.

Die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, greifen in dem Punkte O an. Addieren wir diese Kräfte, so erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, die an demselben Punkte angreift und der Summe der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gleich ist.

Addieren wir die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, -\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2, -\mathfrak{F}_2; \ldots; \mathfrak{F}_n, -\mathfrak{F}_n$, so erhalten wir ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment m gleich der Summe der Momente der beteiligten Kräftepaare ist. Folglich ist

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n),$$

d. h., das Moment des resultierenden Kräftepaares ist gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte in bezug auf den Punkt O.

Wir legen fest, daß wir die Summe $\mathfrak{R}$ der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die beliebig in der Ebene angeordnet sind, *Hauptvektor* dieser Kräfte nennen, die Summe der Momente m dieser Kräfte aber bezüglich des Punktes O nennen wir ihr *Hauptmoment* in bezug auf den Punkt O.

Indem wir diese Begriffe einführen, können wir die erhaltenen Ergebnisse so formulieren:

Beliebige, in einer Ebene liegende Kräfte können immer auf die Kraft, die ihrem Hauptvektor gleich ist und an einem beliebigen Punkt O angreift, sowie auf das Kräftepaar, dessen Moment dem Hauptmoment der gegebenen Kräfte in bezug auf den Punkt O gleich ist, reduziert werden.

Für die Berechnung des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte kann die Projektionsmethode benutzt werden. Wir wählen zwei zueinander senkrechte Achsen O_1x und O_1y (Abb. 56) und berechnen die Projektionen des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ auf diese Achsen. Wenn wir diese Projektionen mit dem Buchstaben X und Y und die Projektionen der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf dieselben Achsen mit den Buchstaben $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \ldots; X_n, Y_n$ bezeichnen und im Auge behalten, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich der Summe der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist, erhalten wir auf Grund des Satzes von der Projektion der Vektorensumme:

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i.$$

Haben wir die Projektionen X und Y des Hauptvektors errechnet, so ermitteln wir seine Größe R nach der Formel

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Die Richtung des Hauptvektors wird durch die Winkel $(\mathfrak{R}, x)$ und $(\mathfrak{R}, y)$ bestimmt, die der Hauptvektor mit den Achsen x und y bildet. Es gilt

$$X = R\cos(\mathfrak{R}, x), \qquad Y = R\cos(\mathfrak{R}, y),$$

woraus wir

$$\cos(\mathfrak{R}, x) = \frac{X}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}, y) = \frac{Y}{R}$$

erhalten.

Durch diese Formeln wird die Richtung des Hauptvektors bestimmt.

§ 27. Kräfte im Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsgleichungen

Wir nehmen an, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und ihr Hauptmoment m bezüglich des Reduktionszentrums gleich Null sind:

$$R = 0, \qquad m = 0.$$

Da $\mathfrak{R} = 0$ ist, heben sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die in Abb. 56 mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, gegenseitig auf. Wegen $m = 0$ heben sich die angegliederten Kräftepaare ebenfalls auf. Folglich befinden sich im betrachteten Falle die gegebenen, an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht.

Im § 26 erhielten wir die Formel

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Folglich ist für $\mathfrak{R} = 0$ notwendig und hinreichend, daß

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

sind.

Indem wir uns der Abhängigkeiten

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad m = \Sigma m(\mathfrak{F}_i)$$

erinnern, folgern wir, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die beliebig in der Ebene liegen, im Gleichgewicht sind, wenn sie drei Gleichungen befriedigen:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \qquad Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$

$$m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n) = 0.$$

Dies sind die *Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte, die beliebig in einer Ebene liegen*

§ 28. Reduktion der Kräfte auf ein Kräftepaar

Wir nehmen an, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte gleich Null, ihr Hauptmoment m bezüglich des Drehpunktes jedoch nicht gleich Null ist, d. h.

$$R = 0, \quad m \neq 0.$$

In diesem Falle heben sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die in Abbildung 56 mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, gegenseitig auf, aber die angegliederten Kräftepaare befinden sich nicht im Gleichgewicht. Folglich werden die gegebenen Kräfte auf ein Kräftepaar reduziert, dessen Moment gleich

$$m = \Sigma m(\mathfrak{F}_i)$$

ist.

§ 29. Reduktion der Kräfte auf eine Resultierende. Das Moment der Resultierenden

Wir setzen jetzt voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte nicht gleich Null ist, d. h.

$$\mathfrak{R} \neq 0.$$

Wir werden zeigen, daß in diesem Falle *die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende reduziert werden, die ihrem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich ist.*

Wenn $m = 0$ ist, heben sich tatsächlich die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, -\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2, -\mathfrak{F}_2; \ldots; \mathfrak{F}_n, -\mathfrak{F}_n$ gegenseitig auf, und die gegebenen Kräfte werden auf die Resultierende $\mathfrak{R}$ zurückgeführt, die an dem Drehpunkt O angreift.

Wir nehmen jetzt $m \neq 0$ an und wählen $m > 0$. Wir betrachten die Kräfte, die ein resultierendes Kräftepaar bilden (d. h. ein Kräftepaar, das sich durch die Addition von angegliederten Kräftepaaren ergibt) und die ihrem Werte nach gleich R sind; dann wird der Arm dieses Kräftepaares gleich $\frac{m}{R}$ sein. Wir ordnen das resultierende Kräftepaar so an, daß eine der Kräfte des Kräftepaares am Punkt O angreift und entgegengesetzt zum Hauptvektor $\mathfrak{R}$ verläuft (in Abb. 57 ist diese Kraft mit $-\mathfrak{R}$ bezeichnet). Die andere Kraft dieses Kräftepaares ist gleich $\mathfrak{R}$ und greift an dem Punkte N an, der auf der Senkrechten liegt, die im Punkte O auf der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{R}$ im Abstand $\frac{m}{R}$ vom Punkte O errichtet ist. Die Senkrechte muß vom Punkte O aus so errichtet sein, daß das Moment des resultierenden Kräftepaares das entsprechende Vorzeichen hat (Abb. 57 entspricht dem Fall $m > 0$). Die beiden an dem Punkte O angreifenden Kräfte $\mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{R}$ heben sich gegenseitig auf. Folglich werden die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende $\mathfrak{R}$ zurückgeführt, die an dem Punkte N angreift.

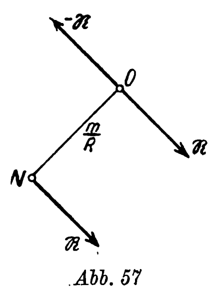


Abb. 57

Wir wollen nun zeigen, daß das Moment der Resultierenden bezüglich eines beliebigen Punktes gleich der Summe der Momente der Komponenten bezüglich desselben Punktes ist, wenn die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende reduziert werden.

Wir betrachten das Moment der an dem Punkte N angreifenden Resultierenden bezüglich des Drehpunktes O (Abb. 57). Bezeichnen wir dieses Moment mit $m(\mathfrak{R})$, so erhalten wir:

$$m(\mathfrak{R}) = R \cdot \frac{m}{R} = m = m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n),$$

d. h., das Moment der Resultierenden bezüglich des Drehpunktes ist gleich der Summe der Momente der Komponenten bezüglich desselben Punktes.

Der Drehpunkt O ist jedoch ein willkürlich gewählter Punkt. Folglich ist das Moment einer Resultierenden in bezug auf einen beliebigen Punkt gleich der Summe der Momente der Komponenten in bezug auf denselben Punkt.

§ 30. Die Darstellung des Drehmomentes mit Hilfe der Komponenten der Kraft

Wir benutzen den soeben bewiesenen Satz vom Moment der Resultierenden für die Darstellung des Drehmomentes mit Hilfe der Komponenten der Kraft.

Gegeben ist die an dem Punkte A angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ (Abb. 58). Es soll das Moment dieser Kraft bezüglich des Punktes O berechnet werden.

Wir betrachten die zueinander senkrechten Koordinatenachsen O_1x und O_1y und bezeichnen die Koordinaten des Punktes A bezüglich dieser Achsen mit x und y, die Koordinaten des Drehpunktes des Momentes O bezüglich derselben Achsen aber mit a und b.

Wir zerlegen die Kraft $\mathfrak{F}$ in Komponenten in Richtung der Achsen x und y. Die Größen dieser Komponenten sind den Projektionen X und Y der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Achsen x und y gleich. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, sind $-(y-b)X$ und $(x-a)Y$ die Momente der Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O. Indem wir die Kraft $\mathfrak{F}$ als die Resultierende ihrer beiden Komponenten ansehen, erhalten wir auf Grund des Satzes vom Moment der Resultierenden

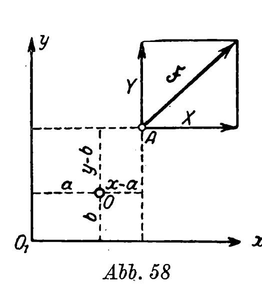


Abb. 58

$$m(\mathfrak{F}) = (x-a)Y - (y-b)X.$$

Wenn der Drehpunkt des Momentes O mit dem Anfang des Koordinatensystems zusammenfällt, ist $a = 0$ und $b = 0$, und das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ *bezüglich des Ursprungs der Koordinaten* wird durch die Formel

$$m(\mathfrak{F}) = xY - yX$$

ausgedrückt.

§ 31. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte Aufgaben

In § 27 haben wir die nachstehenden drei Gleichgewichtsgleichungen für Kräfte aufgestellt, die beliebig in einer Ebene liegen:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \qquad Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$
$$m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n) = 0.$$

In den folgenden Paragraphen werden wir an Beispielen die Anwendung dieser Gleichungen zur Lösung solcher statischen Aufgaben zeigen, bei denen wir es mit Körpern zu tun haben, die sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung von Kräften befinden, welche in einer Ebene liegen. Vorerst jedoch unterstreichen wir, daß Körper unter dem Einfluß von in einer Ebene liegenden Kräften im Gleichgewicht sind, wenn die an ihnen angreifenden Kräften drei Gleichgewichtsgleichungen erfüllen: zwei Gleichungen der Kraftkomponenten und eine Gleichung der Momente.

Wir erinnern daran, daß wir in § 15 solche Aufgaben der Statik als statisch bestimmt bezeichneten, die mit Hilfe der Gleichungen der Statik eines starren Körpers gelöst werden können, zum Unterschied von statisch unbestimmten Aufgaben, für deren Lösung die durch die Statik eines festen Körpers gelieferten Gleichungen sich als ungenügend erweisen (und bei deren Lösung es erforderlich ist, die Deformationen zu beachten, die die Körper unter dem Einfluß der an ihnen angreifenden Kräfte erfahren). Mit Hilfe der Gleichungen können wir soviel unbekannte gesuchte Größen ermitteln, wie Gleichungen vorhanden sind. Hieraus folgt, daß wir immer bestimmen können, ob wir es mit einer statisch bestimmten oder unbestimmten Auf-

gabe zu tun haben, wenn wir die Anzahl der Unbekannten in der gegebenen Aufgabe abzählen und diese Zahl mit der Anzahl der von der Statik des starren Körpers gelieferten Gleichungen vergleichen. Die Aufgabe ist statisch bestimmt, wenn die Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl der Gleichungen ist.

Haben wir es in der von uns zu betrachtenden Aufgabe mit einem Körper zu tun, der sich im Gleichgewicht unter dem Einfluß von Kräften befindet, die in einer Ebene liegen, so liefert uns, wie wir soeben sahen, die Statik des starren Körpers drei Gleichgewichtsgleichungen. Folglich wird eine solche Aufgabe eine statisch bestimmte sein, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich drei ist.

Ist ein System von *zwei* Körpern (auf die in einer Ebene liegende Kräfte einwirken), jedoch im Gleichgewicht so können wir für jeden dieser Körper drei Gleichgewichgtsleichungen aufstellen. Hieraus folgt, daß sich die Aufgabe als statisch bestimmt erweist, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich sechs ist. Entspre-

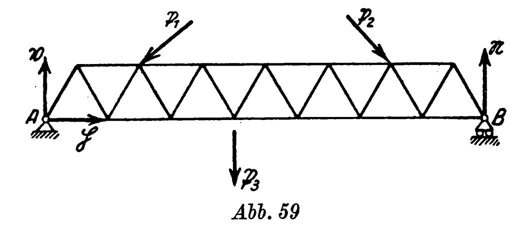


Abb. 59

chen twrid die Aufgabe des Gleichgewichts von Systemen, die aus *drei* Körpern bestehen (unter der Bedingung der Einwirkung aller Kräfte in einer Ebene), statisch bestimmt sein, wenn die Anzahl der Unbekannten gleich neun ist, usw.

Wir erläutern das Gesagte an einigen Beispielen.

Stellen wir uns einen Brückenträger vor, der ein festes Auflager A und ein bewegliches Auflager B hat und auf den die Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ (Abb. 59) einwirken. Ein solcher Träger ersetzt einen einfachen Balken und heißt deshalb Balkenträger. Gefordert wird die Ermittlung der Auflagerreaktionen, die durch die Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ hervorgerufen werden.

Unseren Träger kann man als starren Körper ansehen, der sich unter der Einwirkung der an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ (Abb. 59) und der Auflagerreaktionen in den Punkten A und B im Gleichgewicht befindet. Da das bewegliche Auflager nur einen vertikalen Druck auf die Auflagerfläche ausüben kann, kann auch die Auflagerreaktion $\mathfrak{N}$ im Punkte B nur vertikal gerichtet sein. Das feste Auflager jedoch kann sowohl den Druck in vertikaler als auch in horizontaler Richtung aufnehmen. Hieraus folgt, daß sich die Auflagerreaktion im Punkte A aus der vertikalen Komponente $\mathfrak{V}$ und der horizontalen Komponente $\mathfrak{H}$ zusammensetzt. Somit haben wir drei unbekannte Kräfte: $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$. Wir folgern, daß die gestellte Aufgabe statisch bestimmt ist.

Nehmen wir jetzt an, daß die Auflagerreaktionen für einen Bogenträger zu bestimmen seien (Abb. 60). Gegeben sind die Belastungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Die Kämpfer des Bogens A und B sind gelenkig mit den festen Auflagern verbunden. Ein solcher Bogen heißt *Zweigelenkbogen.*

Da beide Auflager fest sind, hat jedes Auflager je zwei Auflagerreaktionen: die Vertikalreaktionen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ und die Horizontalreaktionen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$. Wegen der vier unbekannten Reaktionen erweist sich die Aufgabe der Bestimmung dieser Reaktionen als statisch unbestimmt, der Zweigelenkbogen ist hinsichtlich der Bestimmung der Auflagerreaktionen ein statisch unbestimmtes System.

Die Sache ändert sich jedoch, wenn der Bogen aus zwei Halbbogen konstruiert ist, die durch ein Gelenk C verbunden sind (Abb. 61). Man nennt die so entstandene Konstruktion einen *Dreigelenkbogen.* Jeden Halbbogen können wir als starren Körper ansehen und für jeden je drei Gleichgewichtsgleichungen aufstellen. Wir zählen nun die Anzahl der unbekannten Kräfte. Auf den linken Halbbogen wirken (außer der Belastung $\mathfrak{P}_1$) die Reaktionen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ der Kämpferauflager ein. Weiterhin greift an dem Gelenkpunkt C eine Kraft an, die der linke Halbbogen von seiten des rechten erfährt. Wir zerlegen diese Kraft in die vertikale und die horizontale Kompo-

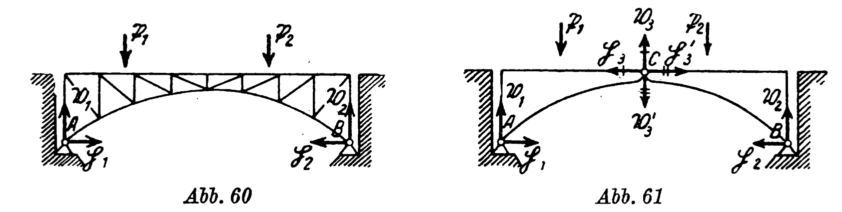


Abb. 60 Abb. 61

nente $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{H}_3$; in Abb. 61 sind diese Kräfte mit einem Querstrich bezeichnet. Da die Wirkung gleich der Gegenwirkung ist, wirken auf den rechten Halbbogen von seiten des linken im Scheitelgelenk C die Kräfte $\mathfrak{V}_3'$ und $\mathfrak{H}_3'$, die gleich und entgegengesetzt den soeben erwähnten Kräften $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{H}_3$ sind (die an dem rechten Halbbogen angreifenden Kräfte $\mathfrak{V}_3'$ und $\mathfrak{H}_3'$ sind in Abbildung 61 mit zwei Querstrichen bezeichnet). Außerdem greifen am rechten Halbbogen die Belastung $\mathfrak{P}_2$ und die Reaktionen $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{H}_2$ der Kämpferauflager an. Somit haben wir in der Anzahl der Kräfte, die an dem einen wie an dem anderen Halbbogen angreifen, sechs unbekannte Kräfte: $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{V}_3$, $\mathfrak{H}_3$. Da die Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl der aufstellbaren Gleichungen ist, gilt als die Aufgabe der Ermittlung der Unbekannten statisch bestimmt. In bezug auf die Bestimmung der Auflagerreaktionen erscheint der Dreigelenkbogen als statisch bestimmtes System.

§ 32. Beispiel für die Bestimmung von Auflagerreaktionen

Wir gehen nun zur Lösung der Aufgaben mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \qquad Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$

$$m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n) = 0$$

über und bemerken, daß wir volle Freiheit in der Wahl der Achsen x und y besitzen, auf die wir die Kräfte projizieren, und ebenso in der Wahl des Drehpunktes, bezüglich dessen wir ihre Momente aufstellen.

Diese Willkür in der Wahl der Koordinatenachsen und des Momentendrehpunktes muß ausgenützt werden, um möglichst einfache Gleichgewichtsgleichungen zur Berechnung der Unbekannten zu erhalten. Die Projektionsachsen sind senkrecht zum Verlauf einer der unbekannten Kräfte zu richten, die in solchem Falle aus der entsprechenden Gleichgewichtsgleichung herausfällt. Der Drehpunkt der Momente muß im Schnittpunkt der Wirkungslinien zweier unbekannter Kräfte gewählt werden, da bei einer solchen Wahl diese beiden unbekannten Kräfte in den Momentengleichungen nicht enthalten sind. In dieser Gleichung verbleibt folglich nur eine unbekannte Größe.

Wir bemerken noch, daß es nicht notwendig ist, jede Aufgabe mit Hilfe zweier Projektionsgleichungen und einer Momentengleichung zu lösen. In vielen Fällen kann es sich als günstig erweisen, die Kräfte lediglich auf eine Achse zu projizieren, dafür aber zwei Momentengleichungen in bezug auf zwei verschiedene Punkte aufzustellen oder aber, wobei die Projektionsgleichungen gänzlich vermieden werden, drei Momentengleichungen in bezug auf drei verschiedene Punkte aufzustellen. Wir werden im folgenden Paragraphen Gelegenheit haben, diese Bemerkungen anzuwenden.

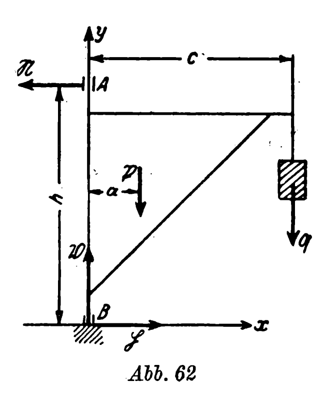


Abb. 62

Es könnte fälschlicherweise scheinen, daß wir, indem wir die Kräfte auf alle möglichen Achsen projizieren und die Momente bezüglich verschiedener Punkte zusammenstellen, für einen Körper beliebig viele Gleichgewichtsgleichungen aufstellen und mit Hilfe dieser Gleichungen beliebig viele unbekannte Größen bestimmen können. Natürlich wäre ein solcher Schluß nicht richtig. Wir können für einen gegebenen Körper beliebig viele Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, aber schon die vierte Gleichung und ebenso alle folgenden würden die Folgerungen einer der ersten drei Gleichungen sein. Mit Hilfe aller dieser Gleichungen vermögen wir nur drei unbekannte Größen zu bestimmen.

In diesem Paragraphen bringen wir nun einige Beispiele zur Bestimmung von Auflagerreaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen.

Beispiel 10. Es sind die Auflagerreaktionen eines Krans (Abb. 62) mit folgenden Werten zu bestimmen: Gewicht des Krans $P = 2$ t, Abstand seines Schwerpunktes von der Drehachse $a = 1$ m, Ausladung $c = 4$ m, Länge des vertikalen Ständers $h = 5$ m. Das Gewicht der dem Kran angehängten Last beträgt $Q = 3$ t.

Die Reaktion des Lagers A verläuft waagerecht, wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben $\mathfrak{N}$. Die Reaktion des Stützzapfenlagers setzt sich aus der vertikalen Komponente $\mathfrak{V}$ und der horizontalen Komponente $\mathfrak{H}$ zusammen. Die Kräfte $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ sind zu bestimmen.

Da sich der Kran unter dem Einfluß der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ im Gleichgewicht befindet, müssen diese fünf Kräfte drei Gleichgewichtsgleichungen befriedigen.

Wir wählen die Achsen x und y so, wie es in Abb. 62 gezeigt ist. Indem wir sämtliche Kräfte auf diese Achsen projizieren, erhalten wir die zwei ersten Gleichgewichtsgleichungen:

$$H - N = 0,$$

$$V - P - Q = 0.$$

Danach stellen wir die Gleichung der Momente um den Drehpunkt B auf:

$$N h - P a - Q c = 0.$$

Die aufgestellten drei Gleichungen lösen wir bezüglich der Unbekannten N, V und H. Setzen wir die gegebenen Werte ein, so finden wir:

$$N = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{5} = 2{,}8 \text{ t},$$

$$V = 2 + 3 = 5 \text{ t}, \qquad H = 2{,}8 \text{ t}.$$

Beispiel 11. Ein Balkenträger (Abb. 63) stützt sich auf das feste Auflager A und das bewegliche Auflager B, die Länge des Paneels ist a, die Höhe des Trägers h, an den Knoten

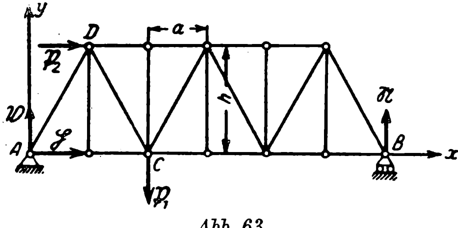


Abb. 63

C und D greifen die vertikale Kraft $\mathfrak{P}_1$ und die horizontale Kraft $\mathfrak{P}_2$ an. Man ermittle die Auflagerreaktionen.

Die Reaktion $\mathfrak{N}$ des beweglichen Auflagers B verläuft vertikal, die Reaktion des unbeweglichen Auflagers A setzt sich aus der vertikalen Komponente $\mathfrak{V}$ und der horizontalen Komponente $\mathfrak{H}$ zusammen. Da sich der Träger im Gleichgewicht unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ befindet, müssen diese fünf Kräfte die Gleichgewichtsgleichungen befriedigen.

Wir legen die Achsen x und y so, wie es aus Abb. 63 hervorgeht, und wählen den Punkt A als Momentendrehpunkt. Damit erhalten wir die Gleichgewichtsgleichungen

$$H + P_2 = 0, \qquad V + N - P_1 = 0$$

$$6 N a - 2 P_1 a - P_2 h = 0,$$

und ermitteln daraus:

$$N = \frac{1}{3} P_1 + \frac{h}{6a} P_2,$$

$$V = \frac{2}{3} P_1 - \frac{h}{6a} P_2,$$

$$H = -P_2.$$

Das Minuszeichen bei der Reaktion H zeigt, daß diese Kraft nicht so verläuft, wie in Abb. 63 angenommen, sondern entgegengesetzt gerichtet ist.

Beispiel 12. Es sind die Auflagerreaktionen der Kämpfer A und B eines Dreigelenkbogens und die Reaktionen im Scheitelgelenk C zu bestimmen, die durch die vertikalen Belastungen $P_1 = 20$ t und $P_2 = 40$ t hervorgerufen werden, welche in Abständen von 12 m

bzw. 8 m von der Mitte des Bogens angreifen (Abb. 64). Die Spannweite des Bogens mißt 40 m, die Höhe des Scheitelgelenkes über der Kämpferebene ist gleich 8 m.

Wir bezeichnen die Stützreaktionen der Kämpferscharniere A und B mit $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{H}_2$, die Reaktionen im Scheitelgelenk C, die an dem linken Halbbogen angreifen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{H}_3$, die Reaktionen in demselben Punkte, die an dem rechten Halbbogen angreifen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}_3'$ und $\mathfrak{H}_3'$ (diese Reaktionen sind der Größe nach gleich und entgegengesetzt den Reaktionen $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{H}_3$ gerichtet).

In Abb. 64 sind die an dem linken Halbbogen angreifenden Kräfte $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{H}_3$ mit einem Querstrich versehen, mit zwei Querstrichen dagegen die Kräfte $\mathfrak{V}_3'$ und $\mathfrak{H}_3'$, die auf den rechten Halbbogen einwirken.

Wir stellen drei Gleichgewichtsgleichungen für die Kräfte auf, die an dem gesamten Brückenbogen, also an beiden Halbbogen, angreifen.

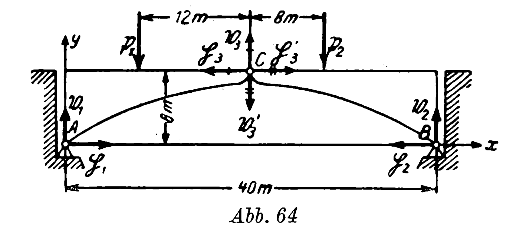


Abb. 64

Wenn wir die Kräfte auf die horizontale und die vertikale Achse x und y projizieren und die Momente bezüglich des Gelenkes A bestimmen, erhalten wir:

$$H_1 - H_3 = 0,$$

$$V_1 + V_2 - 20 - 40 = 0,$$

$$40\, V_2 - 20 \cdot 8 - 40 \cdot 28 = 0.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ermitteln wir:

$$V_1 = 28 \text{ t}, \qquad V_2 = 32 \text{ t}.$$

Wir stellen nun die Gleichgewichtsgleichungen für den linken Halbbogen allein auf, wobei wir die Kraftkomponenten in x- und y-Richtung betrachten und die Momente bezüglich des Punktes C aufstellen:

$$H_1 - H_3 = 0,$$

$$V_1 + V_3 - 20 = 0,$$

$$8\, H_1 - 20\, V_1 + 20 \cdot 12 = 0.$$

Hieraus ermitteln wir:

$$H_1 = H_2 = H_3 = 40 \text{ t}, \qquad V_3 = -8 \text{ t}.$$

Das Minuszeichen der Reaktion $\mathfrak{V}_3$ zeigt an, daß die Richtungen der Kräfte $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{V}_3'$ entgegengesetzt den in Abb. 64 angenommenen Richtungen sind: Die Kraft $\mathfrak{V}_3$, die an dem linken Halbbogen angreift, verläuft nach unten, während die Kraft $\mathfrak{V}_3'$, die auf den rechten Halbbogen einwirkt, nach oben verläuft.

§ 33. Andere Beispiele für die Anwendung von Gleichgewichtsgleichungen

Wir betrachten noch einige Beispiele für die Anwendung von Gleichgewichtsgleichungen.

Beispiel 13. Der waagerechte Träger AB ist am Ende A gelenkig an der senkrechten Wand befestigt und wird im Punkte B von der Zugstange BC gehalten, die mit dem Horizont den Winkel $\alpha = 32°$ bildet (Abb. 65). Die Länge des Trägers AB ist $l = 4$ m, sein Gewicht $P = 200$ kg können wir uns in der Mitte des Trägers angreifend denken. Außerdem trägt der Balken eine vertikale Belastung $Q = 500$ kg, die in einer Entfernung von $c = 3$ m vom Punkt A angreift. Es ist die Zugkraft der Stange BC und die Reaktion des Gelenks zu bestimmen.

Betrachten wir die Kräfte, die an dem Träger AB angreifen. Dieser Träger befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung folgender Kräfte: des Eigengewichtes des Trägers $\mathfrak{P}$, des Gewichtes der Belastung $\mathfrak{Q}$, der Reaktion der Zugstange $\mathfrak{T}$ (die der Größe nach der Zugkraft der Stange gleich ist) und der Reaktion des Gelenkes A, die wir in eine vertikale und eine horizontale Komponente $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ zerlegen. Da sich der Träger im Gleichgewicht befindet, müssen diese Kräfte drei Gleichgewichtsgleichungen befriedigen.

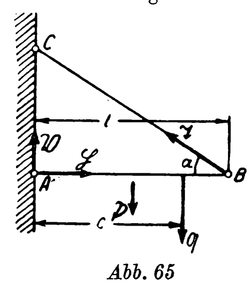


Abb. 65

Zur Bestimmung der Reaktion $\mathfrak{V}$ stellen wir die Momentengleichung bezüglich des Punktes B auf:

$$-4\,V + 2 \cdot 200 + 500 \cdot 1 = 0,$$

aus der wir $V = 225$ kg erhalten.

Zur Ermittlung der Reaktion $\mathfrak{H}$ stellen wir die Momentengleichung bezüglich des Punktes C auf.

Mit

$$AC = AB \operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} 32° = 2{,}5 \text{ m}$$

ergibt sich

$$2{,}5\,H - 2 \cdot 200 - 3 \cdot 500 = 0,$$

woraus wir $H = 760$ kg erhalten.

Schließlich projizieren wir zur Bestimmung der Reaktion $\mathfrak{T}$ alle Kräfte auf die waagerechte Achse und erhalten:

$$H - T \cos \alpha = 0,$$

woraus

$$T = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{760}{\cos 32°} = 896 \text{ kg}$$

folgt.

Beispiel 14. Das Ende einer Kette, die eine Kettenbrücke hält, ist in einem Mauerwerk verankert, das die Form eines rechteckigen Parallelepipeds hat (Abb. 66). Die Kette liegt in Richtung der Diagonalen des rechteckigen Längsschnittes des Mauerwerks und bildet den Winkel α mit der Horizontalen. Um das Kettenende zu halten, muß das Mauerwerk genügend schwer sein. Gegeben ist die Zugkraft F in der Kette und der Reibungskoeffizient f zwischen Mauerwerk und Boden. Zu ermitteln ist das notwendige Gewicht des Mauerwerkes.

Auf das Mauerwerk wirken folgende Kräfte ein: sein Eigengewicht $\mathfrak{P}$, die Reaktion $\mathfrak{F}$ der Kette (die der Größe nach gleich der Kettenzugkraft ist), die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Bodens, auf dem das Mauerwerk ruht, und die Reibungskraft $\mathfrak{T}$. Der Angriffspunkt der Reaktion $\mathfrak{N}$ ist uns anfangs unbekannt, wir bezeichnen seinen Abstand vom rechten Rand des Mauerwerkes mit a. Ist das Mauerwerk imstande, das Kettenende festzuhalten, d. h., bleibt es unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, so müssen diese Kräfte die Gleichgewichtsgleichungen befriedigen. Betrachten wir die Horizontal- und Vertikalkomponenten der Kräfte und die Momente bezüglich des Schwerpunktes C des Mauerwerkes, so erhalten wir:

$$F \cos \alpha - T = 0,$$

$$F \sin \alpha - P + N = 0,$$

$$N\left(\frac{l}{2} - a\right) - T \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

wobei l die Länge des Mauerwerkes und h seine Höhe bedeuten.

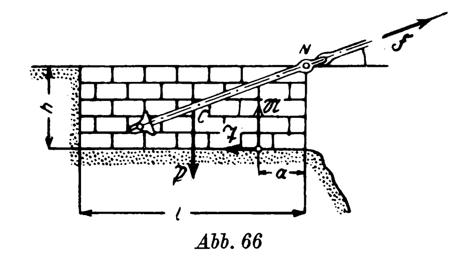


Abb. 66

Lösen wir diese Gleichungen nach den unbekannten Größen N, T und a auf, so gilt:

$$N = P - F \sin \alpha, \qquad T = F \cos \alpha,$$

$$a = \frac{l}{2} - \frac{hF \cos \alpha}{2(P - F \sin \alpha)}.$$

Diese Größen N, T und a müssen folgenden Bedingungen entsprechen:

1. $N \geqq 0$, weil die Reaktion des Bodens nicht nach unten verlaufen kann;
2. $T \leqq fN$ gemäß dem bekannten Reibungsgesetz (§ 9);
3. $a \geqq 0$, weil die Reaktion des Bodens nicht rechts vom rechten Mauerrand aus angreifen kann.

Hieraus erhalten wir folgende Bedingungen:

$$P - F \sin \alpha \geqq 0,$$

$$F \cos \alpha \leqq f(P - F \sin \alpha),$$

$$l(P - F \sin \alpha) - hF \cos \alpha \geqq 0.$$

Wenn wir diese Ungleichungen nach P auflösen, erhalten wir:

$$P \geqq F \sin \alpha ,$$

$$P \geqq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{f} \right),$$

$$P \geqq F \left(\sin \alpha + \frac{h}{l} \cos \alpha \right).$$

Behalten wir im Auge, daß $h = l \operatorname{tg} \alpha$ ist, so können wir an Stelle der letzten Ungleichung schreiben:

$$P \geqq 2F \sin \alpha .$$

Das sind die Bedingungen, denen das Gewicht P des Mauerwerkes entsprechen muß. Sind $\alpha < 45°$ und $f < 1$, so ist $\cos \alpha > \sin \alpha$ und umso mehr ist $\frac{\cos \alpha}{f} > \sin \alpha$. In diesem Falle entsprechen wir allen Bedingungen für P, wenn wir annehmen, daß

$$P \geqq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{f} \right)$$

ist.

Aus dieser Ungleichung wird somit das notwendige Gewicht des Mauerwerkes bestimmt.

Nehmen wir an, es ist $F = 20$ t, $\alpha = 20°$, $f = 0,6$. Das kleinste zulässige Gewicht des Mauerwerkes ist also

$$P = 20 \left(0,342 + \frac{0,940}{0,6} \right) = 38,2 \text{ t}.$$

§ 34. Die Bestimmung der Wirkungslinie der Resultierenden

Wenn sich die in einer Ebene angreifenden Kräfte auf eine Resultierende reduzieren lassen (d. h., wenn ihr Hauptvektor nicht gleich Null ist), können Größe und Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ nach den am Ende des § 26 angeführten Formeln berechnet werden. Die Wirkungslinie der Resultierenden $\mathfrak{R}$ kann jedoch mit Hilfe des Satzes vom Moment der Resultierenden auf folgende Weise ermittelt werden:

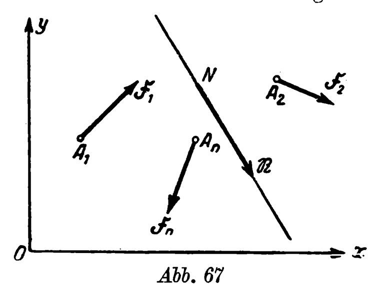


Abb. 67

Wir nehmen an, daß die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ (Abb. 67) gegeben sind, und setzen voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte nicht gleich Null ist. Folglich werden die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende reduziert, die gleich $\mathfrak{R}$ ist und an irgendeinem Punkte N angreift.

Wir bemerken, daß man als Angriffspunkt N einen beliebigen Punkt wählen kann, der auf der Wirkungslinie der Resultierenden liegt. Wir wollen nun die Gleichung dieser Wirkungslinie bezüglich der Koordinatenachsen Ox und Oy aufstellen (Abb. 67).

Zu diesem Zweck betrachten wir die Momente der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und das Moment der Resultierenden $\mathfrak{R}$ bezüglich des Koordinatenursprungs O. Das Gleichgewicht erfordert, daß das Moment der Resultierenden gleich der Summe der Momente der Kraftkomponenten ist.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes N, der auf der Wirkungslinie der Resultierenden liegt, mit den Buchstaben x und y und die Komponenten der Resultierenden $\mathfrak{R}$ in x- und y-Richtung mit den Buchstaben X und Y. Auf Grund der

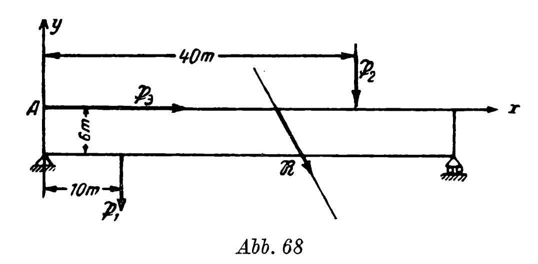


Abb. 68

in § 30 aufgestellten Formel ist das Moment der an dem Punkte N angreifenden Kraft $\mathfrak{R}$ in bezug auf den Koordinatenursprung gleich $xY - yX$.

Wenn wir die Summe der Momente der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich des Koordinatenursprungs kurz mit $\Sigma m\,(\mathfrak{F}_i)$ bezeichnen, gilt:

$$xY - yX = \Sigma\, m(\mathfrak{F}_i).$$

Diese Gleichung befriedigen die Koordinaten x und y eines jeden Punktes, der auf der Wirkungslinie der Resultierenden $\mathfrak{R}$ liegt. Folglich ist diese Gleichung die *Gleichung der Wirkungslinie der Resultierenden.*

Um die Koordinaten (x, y) irgendeines Angriffspunktes der Resultierenden zu erhalten, können wir eine Koordinate beliebig vorgeben und die andere aus der Gleichung der Wirkungslinie der Resultierenden bestimmen.

Beispiel 15. Auf einen Brückenträger (Abb. 68) wirken die vertikalen Kräfte $P_1 = 20$ t und $P_2 = 40$ t in einem Abstand von 10 m bzw. 40 m vom linken Trägerende, desgleichen die waagerechte Kraft $P_3 = 30$ m auf der Höhe des oberen Trägergurtes; die Höhe des Trägers beträgt 6 m. Es ist die Resultierende der Kräfte P_1, P_2 und P_3 zu bestimmen.

Wenn wir die Achsen x und y so legen, wie es Abb. 68 zeigt, und die gegebenen Kräfte auf diese Achsen projizieren, ermitteln wir die Komponenten X und Y der Resultierenden:

$$X = 30\,\text{t}, \qquad Y = -20 - 40 = -60\ \text{t}.$$

Hieraus gewinnen wir die Größe R der Resultierenden:

$$R = \sqrt{30^2 + 60^2} = 67{,}08\,\text{t}.$$

Jetzt wollen wir die Gleichung der Wirkungslinie der Resultierenden ermitteln. Wir stellen die Momente bezüglich des Punktes A auf (d. h. in bezug auf den Ursprung der Koordinatenachsen x und y) und bemerken, daß die Summe der Momente der gegebenen Kräfte bezüglich dieses Punktes gleich

$$-10 \cdot 20 - 40 \cdot 40 = -1800 \text{ mt}$$

ist. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$-60\,x - 30\,y = -1800,$$

oder

$$2\,x + y = 60.$$

Das ist also die Gleichung der Wirkungslinie der Resultierenden bezogen auf die Achsen x und y. Wir wollen nun die Schnittpunkte dieser Wirkungslinie mit dem oberen und un teren Trägergurt ermitteln. Setzen wir in der soeben erhaltenen Gleichung $y = 0$, so finden wir $x = 30$ m, für $y = -6$ m ergibt sich $x = 33$ m. Die Schnittpunkte der Wirkungslinie der Resultierenden $\mathfrak{R}$ mit dem oberen und unteren Trägergurt befinden sich im Abstand von 30 m bzw. 33 m vom linken Trägerende. Verbinden wir diese Punkte durch eine Gerade, so haben wir die Wirkungslinie der Resultierenden. Ein beliebiger Punkt dieser Geraden kann als Angriffspunkt der Resultierenden angesehen werden.

§ 35. Die Addition von parallelen Kräften in einer Ebene. Gleichgewichtsgleichungen paralleler Kräfte

Die in diesem Kapitel dargelegte Theorie der Addition von beliebig in einer Ebene liegenden Kräften bleibt auch dann anwendbar, wenn gefordert wird, eine beliebige Anzahl von in einer Ebene liegenden parallelen Kräften zu addieren. Man muß dabei nur beachten, daß im Falle paralleler Kräfte die Ermittlung der Vektorensumme (oder des Hauptvektors) $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte auf eine Addition der algebraischen Größen dieser Kräfte zurückgeführt wird, wobei die entsprechenden Vorzeichen einzusetzen sind.

Wir nehmen an, daß die parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen, gegeben sind, wobei die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k$ den Kräften $\mathfrak{F}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{F}_n$ entgegengesetzt gerichtet sind (Abb. 69). Wenn wir den Hauptvektor $\mathfrak{R}$ dieses Kräftesystems auffinden wollen, müssen wir ein Kräftepolygon konstruieren und durch eine Seite abschließen. In Abbildung 69 ist vorausgesetzt, daß

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k > F_{k+1} + \cdots + F_n$$

ist. In diesem Falle gilt, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist:

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_k - F_{k+1} - \cdots - F_n,$$

wobei der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ den gegebenen Kräften parallel ist und nach derselben Seite wie die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k$ verläuft.

Wenn

$$F_{k+1} + \cdots + F_n > F_1 + F_2 + \cdots + F_k$$

wäre, erhielten wir

$$R = F_{k+1} + \cdots + F_n - F_1 - F_2 - \cdots - F_k,$$

und der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ würde parallel den gegebenen Kräften verlaufen und dieselbe Richtung wie die Kräfte $\mathfrak{F}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{F}_n$ besitzen.

Erinnern wir uns der Ergebnisse, die in den §§ 27, 28 und 29 dargelegt sind, so können wir folgern, daß die Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, wenn der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte und ebenso ihr Hauptmoment m bezüglich eines beliebigen Punktes O gleich Null sind. Wenn $\mathfrak{R} = 0$, $m \neq 0$, reduzieren sich die Kräfte zu einem Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Hauptmoment m ist. Ist $\mathfrak{R} \neq 0$, so werden die Kräfte auf eine Resultierende zurückgeführt, die dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich ist.

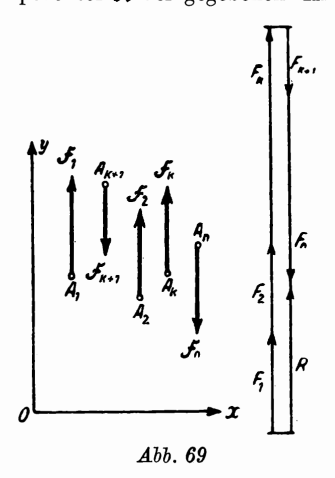


Abb. 69

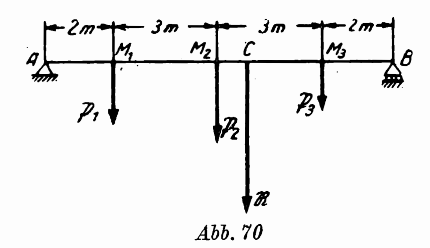


Abb. 70

Für die Gleichgewichtsgleichungen erhalten wir, wenn wir die y-Achse parallel zu den gegebenen Kräften und die x-Achse senkrecht dazu richten und alle Kräfte auf die x-Achse projizieren, die Identität

$$0 \equiv 0.$$

Projizieren wir jedoch auf die y-Achse und stellen die Momentengleichung bezüglich des beliebigen Punktes O auf, so erhalten wir zwei Gleichgewichtsgleichungen:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k - F_{k+1} + \cdots - F_n = 0,$$

$$m(\mathfrak{F}_1) + m(\mathfrak{F}_2) + \cdots + m(\mathfrak{F}_n) = 0.$$

Somit haben wir im Falle paralleler Kräfte nur zwei Gleichgewichtsgleichungen. Hieraus schließen wir, daß die Aufgabe, in der wir es mit parallelen, im Gleichgewicht stehenden Kräften zu tun haben, statisch bestimmt ist, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich Zwei ist.

Beispiel 16. An dem Balken AB greifen in den Punkten M_1, M_2, M_3 die vertikalen Kräfte $P_1 = 1$ t, $P_2 = 2$ t, $P_3 = 3$ t an; $AM_1 = 2$ m, $M_1M_2 = 3$ m, $M_2M_3 = 3$ m, $M_3B = 2$ m (Abb. 70). Es sind nun diese Kräfte zu addieren.

Wir ermitteln den Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$:

$$R = 1 + 2 + 3 = 6\,\text{t}.$$

Da $R \neq 0$ ist, schließen wir, daß die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende zurückgeführt werden können, die dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich ist. Um den Angriffspunkt C dieser Resultierenden zu finden, benutzen wir den Satz vom Moment der Resultierenden. Wir setzen $AC = x$ und stellen fest, daß das Moment der Resultierenden $\mathfrak{R}$ bezüglich des Punktes A gleich der Summe der Momente der Komponenten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ bezüglich desselben Punktes ist. Wir erhalten die Gleichung:

$$6x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 36,$$

woraus folgt, daß

$$x = 6\,\text{m}$$

ist.

Somit befindet sich der Angriffspunkt der Resultierenden in einem Abstand von 6 m vom linken Trägerende.

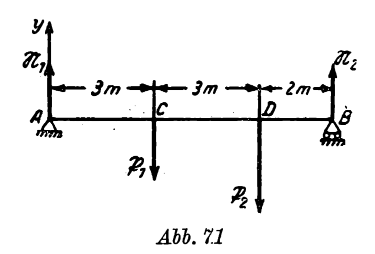


Abb. 71

Beispiel 17. An dem Träger AB, der auf der festen Stütze A und der beweglichen Stütze B liegt, greifen in den Punkten C und D die vertikalen Kräfte $P_1 = 2$ t, $P_2 = 3$ t an. Die Abstände betragen $AC = 3$ m, $CD = 3$ m und $DB = 2$ m (Abb. 71). Man ermittle die Auflagerreaktionen.

Wir bezeichnen die Auflagerreaktionen mit $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Da sich der Träger unter der Einwirkung der parallelen Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ im Gleichgewicht befindet, müssen diese vier Kräfte den zwei Gleichgewichtsgleichungen der parallelen Kräfte entsprechen. Projizieren wir sämtliche Kräfte auf die vertikale y-Achse und addieren die Momente bezüglich des Punktes A, so erhalten wir die Gleichgewichtsgleichungen

$$N_1 + N_2 - 2 - 3 = 0,$$

$$8N_2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 0,$$

woraus folgt:

$$N_2 = 3\,\text{t}, \qquad N_1 = 2\,\text{t}.$$

Wir bemerken, daß die Auflagerreaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen des Trägers nicht mehr bestimmt werden können, wenn der Träger nicht auf zwei, sondern auf drei Auflagern liegt (weil zwei Gleichgewichtsgleichungen für die Bestimmung von drei unbekannten Reaktionen nicht genügen). Folglich stellt der Träger, der mehr als zwei Auflager besitzt, ein statisch unbestimmtes System dar.

Beispiel 18. Der zusammengesetzte Träger ABC, der aus zwei im Punkte C gelenkig verbundenen Balken AC und BC besteht, liegt auf drei Auflagern A, D und B (Abb. 72). In den Punkten M_1 und M_2 greifen die vertikalen Kräfte $P_1 = 10$ t und $P_2 = 5$ t an. Die Maße sind aus Abb. 72 zu ersehen. Es sind die Auflagerreaktionen zu ermitteln.

Der zusammengesetzte Träger ACB stellt ein statisch bestimmtes System dar. Tatsächlich können wir je zwei Gleichgewichtsgleichungen für jeden der Träger AC und BC aufschreiben. In diesen vier Gleichgewichtsbedingungen sind vier unbekannte Reaktionen enthalten: drei Auflagerreaktionen und die Reaktion des Gelenkes C.

Wir bezeichnen die Reaktionen der Auflager A, D und B mit $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ und die Reaktionen des Gelenks C mit $\mathfrak{N}_4$ und $\mathfrak{N}_4'$. Wir stellen fest, daß man im Punkte C zwei Kräfte $\mathfrak{N}_4$ und $\mathfrak{N}_4'$ unterscheiden muß, von denen eine am Trägerteil AC angreift und die andere am Trägerteil CB. Nach dem Prinzip „die Wirkung ist gleich der Gegenwirkung" sind diese zwei Kräfte der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Da lediglich die Ermittlung der Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ verlangt ist, genügt es, drei Gleichgewichtsgleichungen aufzustellen. Wir projizieren alle an dem gesamten

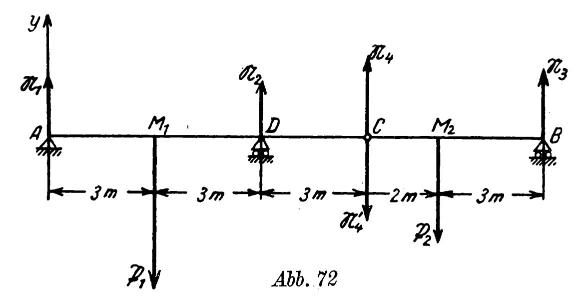


Abb. 72

zusammengesetzten Träger ACB angreifenden Kräfte auf die vertikale y-Achse und stellen Momentengleichungen für jeden der Träger AC und CB bezüglich des Drehpunktes C auf. Wir erhalten:

$$N_1 + N_2 + N_3 - 10 - 5 = 0\,,$$

$$-9\,N_1 - 3\,N_2 + 10 \cdot 6 = 0\,,$$

$$5\,N_3 - 5 \cdot 2 = 0\,.$$

Lösen wir diese Gleichungen auf, so finden wir:

$$N_3 = 2\,\mathrm{t}\,, \qquad N_1 = 3{,}5\,\mathrm{t}\,, \qquad N_2 = 9{,}5\,\mathrm{t}\,.$$

KAPITEL V

DIE METHODE DES SEILECKS

§ 36. Erster Fall: Das Kräftepolygon ist nicht geschlossen

Im vorigen Kapitel haben wir die von POINSOT stammende analytische Lösung zur Addition beliebig in der Ebene liegender Kräfte dargelegt. Wir wollen nun die Methode des Seilecks zeigen, die CULMANN entwickelt hat.[1]

Es mögen drei Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ gegeben sein, die an den Punkten M_1, M_2, M_3 angreifen (Abb. 73) und addiert werden sollen.

[1] K. Culmann. Die graphische Statik (1866). In diesem Kapitel sind lediglich die Grundlagen der Methode des Seilecks dargelegt. Siehe auch W. L. Kirpitschew, Die Grundlagen der graphischen Statik, Moskau 1933 (Б. Л. Кирпичев, Основания графической статики, Изд. 6, Гостехиздат, М.-Л., 1933)

Wir beginnen damit, daß wir ein Vieleck der gegebenen Kräfte konstruieren (Abb. 74). Hierfür wählen wir einen beliebigen Punkt a, von dem aus wir den Abschnitt ab, der gleich $\mathfrak{F}_1$ ist und parallel dazu verläuft, abtragen. Dann folgt der Abschnitt bc, der gleich $\mathfrak{F}_2$ ist und parallel dazu verläuft, und weiterhin der Abschnitt cd, der gleich und parallel $\mathfrak{F}_3$ ist. Nehmen wir an, wir würden ein nichtgeschlossenes Kräftevieleck erhalten. Auf Grund der Anmerkung im § 29 könnten wir folgern, daß sich die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ auf eine Resultierende reduzieren, die die schließende Seite ad des Vielecks darstellt.

Mit der Konstruktion des Kräftevielecks haben wir auf diese Weise sowohl Größe als auch Richtung der Resultierenden dieser Kräfte graphisch bestimmt.

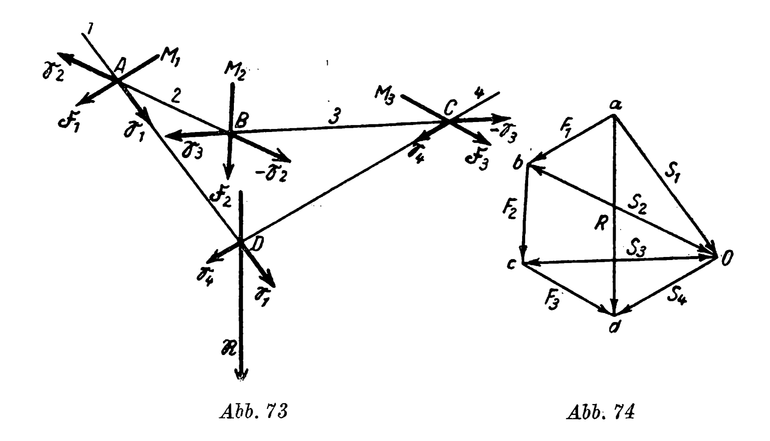


Abb. 73 *Abb. 74*

Es verbleibt noch, den Angriffspunkt der Resultierenden zu ermitteln. Zu diesem Zweck dient die Konstruktion eines zweiten Vielecks, des Seilecks.

Wählen wir in Abb. 74 einen beliebigen Punkt O, den wir Pol nennen, und verbinden wir ihn durch Geraden mit den Ecken a, b, c, d des Kräftevielecks. Die erhaltenen Abschnitte Oa, Ob, Oc, Od heißen Strahlen; wir bezeichnen sie mit den Buchstaben S_1, S_2, S_3, S_4 und merken uns, daß die Anzahl der Strahlen immer um Eins größer als die Anzahl der gegebenen Kräfte ist.

Dann kehren wir zu der Abb. 73 zurück und ziehen die Gerade *1* als Parallele zum Strahl S_1 bis zum Zusammentreffen mit der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}_1$ im Punkte A. Vom erreichten Punkte A legen wir die Gerade *2* als Parallele zum Strahl S_2 bis zum Zusammentreffen mit der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}_2$ im Punkte B. Vom Punkte B ziehen wir die Gerade *3* als Parallele zum Strahl S_3 bis zum Zusammentreffen mit der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}_3$ im Punkte C und endlich vom Punkte C die Gerade *4* als Parallele zum Strahl S_4. Die Geraden *1*, *2*, *3*, *4* bilden das sogenannte Seileck. Wir bemerken, daß die Anzahl der Seiten des Seilecks gleich der Strahlenanzahl und folglich um Eins größer als die Anzahl der gegebenen Kräfte ist.

Die äußeren Seiten *1* und *4* des Seilecks schneiden sich in D. Wir wollen zeigen, daß der Punkt D der gesuchte Angriffspunkt der Resultierenden $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ ist.

Um sich davon zu überzeugen, verlegen wir die Angriffspunkte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ entlang ihrer Wirkungslinien nach den Ecken A, B, C des Seilecks. Dann zerlegen wir die Kraft $\mathfrak{F}_1$, die an dem Punkte A angreift, in zwei Komponenten, die an demselben Punkte angreifen und in Richtung der Geraden *1* und *2* verlaufen. Um Größen und Richtungen dieser Komponenten zu erhalten, benutzen wir die Regel des Kräftedreiecks. Wir stellen fest, daß es nicht notwendig ist, eine neue Konstruktion zu wählen, da das erforderliche Dreieck bereits in Abb. 74 vorhanden ist: Das Dreieck ist mit aOb gekennzeichnet. Aus diesem Dreieck schließen wir, daß S_1 und S_2 die Größen der unbekannten Komponenten sind. Den Verlauf dieser Komponenten bestimmen wir nach der bekannten Regel (die Komponenten verlaufen in einer Richtung um das Kräftedreieck herum, die Resultierende verläuft dagegen in entgegengesetzter Richtung).

Die ermittelten Komponenten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, die in der entsprechenden Weise verlaufen, tragen wir vom Punkte A ab.[1]

In genau derselben Weise zerlegen wir die Kraft $\mathfrak{F}_2$, die an dem Punkte B angreift, in zwei Komponenten, die in Richtung der Geraden *2* und *3* verlaufen. Das entsprechende Kräftedreieck ist in Abb. 74 zu finden (das Dreieck bOc). Wir können folgern, daß S_2 und S_3 die Größen der unbekannten Komponenten sind. Indem wir ihre Richtung nach der gezeigten Regel bestimmen, tragen wir die Komponenten von dem Punkte B ab.

Entsprechend zerlegen wir die an dem Punkte C angreifende Kraft $\mathfrak{F}_3$ in zwei Komponenten, die der Größe nach gleich S_3 und S_4 sind und in Richtung der Geraden *3* und *4* verlaufen.

Wir stellen nun fest, daß an den Punkten A und B zwei Kräfte angreifen, die der Kraft S_2 gleich sind und auf der Geraden *2* nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Diese Kräfte heben sich gegenseitig auf und können vernachlässigt werden. Genau so heben sich die beiden Kräfte gegenseitig auf, die der Kraft S_3 gleich sind, an den Punkten B und C angreifen und die auf der Geraden *3* in entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Es verbleiben lediglich die zwei Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$, die an den Punkten A und C angreifen und in Richtung der äußeren Seiten *1* und *4* des Seilecks verlaufen.

Um diese beiden Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ zu addieren, verlegen wir ihre Angriffspunkte entlang der Wirkungslinien nach ihrem Schnittpunkt, d. h. nach dem Punkte D. Die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ wird an demselben Punkt D angreifen, ihre Größe und Richtung sind nach der Regel des Kräftedreiecks zu finden. Das entsprechende Dreieck ist in Abb. 74 dargestellt; es ist das Dreieck aOd, woraus wir schließen, daß die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ gleich $\mathfrak{R}$ ist. Somit sind die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ nunmehr auf die eine Kraft $\mathfrak{R}$ zurückgeführt, die an dem Punkte D angreift.

---

[1] In Abb. 73 sind die Kräfte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ in verkleinertem Maßstab dargestellt.

Wenn wir durch den Punkt D eine Gerade legen, die parallel zu $\mathfrak{R}$ verläuft, haben wir damit die Wirkungslinie der Resultierenden gefunden. Ihren Angriffspunkt kann man nach einem beliebigen Punkt auf dieser Geraden verlegen.

Beispiel 19. An einem Träger greifen die vertikalen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ an (Abb. 75). Es ist ihre Resultierende zu konstruieren.

Mit Hilfe der Abb. 76 konstruieren wir ein Kräftevieleck. Die abschließende Seite des Kräftevielecks bestimmt Größe und Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$. Folglich ist die Größe der Resultierenden $R = F_1 + F_2 + F_3$, sie verläuft senkrecht nach unten.

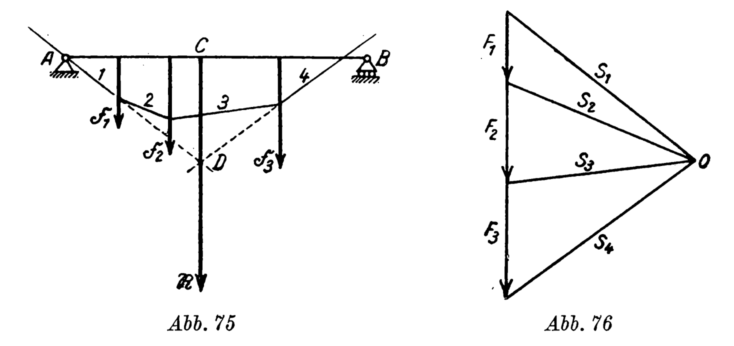


Abb. 75 *Abb. 76*

Um den Angriffspunkt der Resultierenden $\mathfrak{R}$ zu ermitteln, konstruieren wir die Strahlen S_1, S_2, S_3 und S_4 und das Seileck *1*, *2*, *3*, *4*. Der Schnittpunkt D der äußeren Strahlen *1* und *4* ist einer der Angriffspunkte der Resultierenden.

§ 37. Zweiter Fall: Geschlossenes Kräftepolygon

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, die an den Punkten M_1, M_2, M_3 (Abb. 77) angreifen. Sie sind zu addieren.

Entsprechend Abb. 78 konstruieren wir ein Vieleck der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ und nehmen an, daß es nicht geschlossen ist. Auf Grund der Prüfung, die in den §§ 27 und 28 dargelegt ist, wissen wir bereits, daß in diesem Fall die gegebenen Kräfte entweder auf Kräftepaare zurückgeführt werden können oder sich im Gleichgewicht befinden.

Wählen wir den Pol O und ziehen die Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4. Da der letzte Punkt des Vielecks mit dem ersten zusammenfällt, stimmt auch der letzte Strahl S_4 mit dem ersten Strahl S_1 überein.

Alsdann konstruieren wir (Abb. 77) ein Seileck *1*, *2*, *3*, *4*, wie oben erklärt. Wir bemerken, daß seine äußeren Seiten *1* und *4* parallel sind, da sie beide mit den zusammenfallenden Strahlen S_1 und S_4 parallel sind.

Wir verlegen die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ entlang ihrer Wirkungslinien nach den Ecken A, B, C des Seilecks und zerlegen so jede Kraft in zwei Komponenten, die an denselben Punkten angreifen und in Richtung der Seiten des Seilecks verlaufen.

Größe und Richtung der Komponenten bestimmen wir nach der Regel des Kräftedreiecks, wozu wir alle benötigten Dreiecke in Abbildung 78 vorfinden. Wenn wir die oben dargelegten Überlegungen wiederholen, können wir uns überzeugen, daß die Kräfte, die in Richtung der 2. und 3. Seite des Seilecks verlaufen (die durch die Abschnitte S_2 und S_3 dargestellt sind), sich gegenseitig aufheben, und daß sich infolgedessen die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ auf zwei Kräfte, die der Größe nach S_1 und S_4 gleich sind und in Richtung der äußeren Seiten des Seilecks (*1* und *4*) in entgegengesetzten Richtungen verlaufen[1], beschränken.

Da $S_1 = S_4$ ist, sind die gegebenen Kräfte auf ein Kräftepaar reduziert. Das Moment dieses Kräftepaares m ist

$$m = S_1 d,$$

wobei S_1 die Länge des ersten Strahles

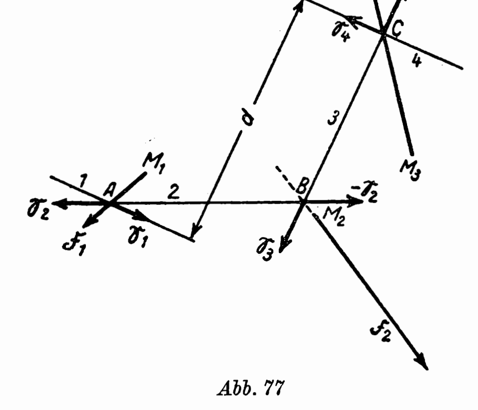


Abb. 77

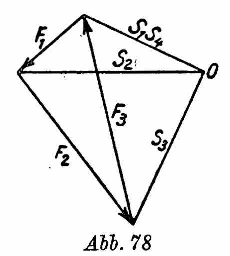


Abb. 78

(Abb. 78) und d der Abstand zwischen den äußeren Seiten des Seilecks ist (Abb. 77). Wir schreiben das Moment m mit dem Pluszeichen, da das Kräftepaar der Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ die Ebene der Abb. 77 gegen den Uhrzeigersinn zu drehen sucht.

Damit die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ sich im Gleichgewicht befinden, ist es erforderlich, daß die in Richtung der äußeren Seiten des Seilecks verlaufenden Kräfte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ sich gegenseitig aufheben. Dazu ist es aber nötig, daß die äußeren Seiten des Seilecks auf einer Geraden liegen.

Wir vereinbaren, das Seileck, dessen äußere Seiten auf einer Geraden liegen, als *geschlossen* zu bezeichnen. In solchem Falle können die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte, die beliebig in einer Ebene liegen, auf folgende Weise formuliert werden: *Für das Gleichgewicht der Kräfte in einer Ebene ist es notwendig und hinreichend, daß das Kräftevieleck und das Seileck geschlossen sind.* Dies sind die graphischen Bedingungen des Kräftegleichgewichts in einer Ebene.

Natürlich bleiben alle Ergebnisse gültig, die wir in diesem und im vorigen Paragraphen ermittelt haben, gleichviel, wie groß die Anzahl der gegebenen Kräfte sein mag. Nochmals zusammenfassend, folgern wir:

1. Ist das Vieleck der gegebenen Kräfte nicht geschlossen, so lassen sich die Kräfte auf eine Resultierende zurückführen.

[1] In Abb. 77 sind die Kräfte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ im verkleinerten Maßstab dargestellt.

2. Ist das Kräftevieleck geschlossen, das Seileck jedoch nicht geschlossen, so lassen sich die Kräfte auf ein Kräftepaar zurückführen.

3. Sind das Kräftevieleck und das Seileck geschlossen, so befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht.

Wir wenden nun die gefundenen graphischen Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Auflagerreaktionen des Trägers an.

Beispiel 20. An dem Träger AB (Abb. 79), der auf zwei Auflagern A und B liegt, greifen die vertikalen Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ an.

Es sind die Auflagerreaktionen graphisch zu bestimmen.

Wir bezeichnen die unbekannten Reaktionen mit den Buchstaben $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$.

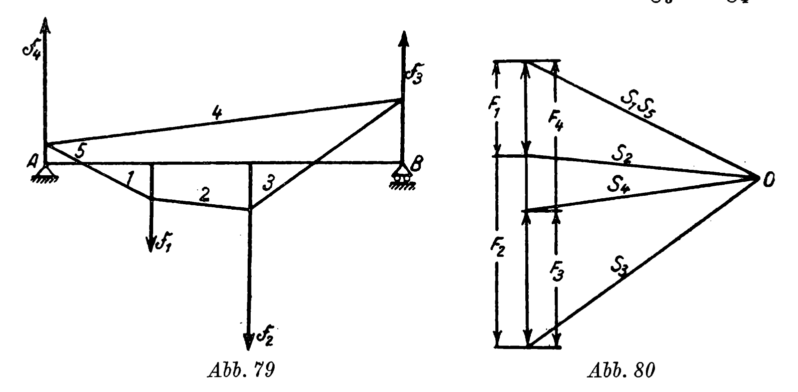


Abb. 79 *Abb. 80*

Die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ müssen den beiden aufgestellten graphischen Gleichgewichtsbedingungen entsprechen.

In Abb. 80 konstruieren wir ein Kräftevieleck. Da die Kraft $\mathfrak{F}_3$ unbekannt ist, ist auch die vierte Ecke des Kräftevielecks (das Ende der Kraft $\mathfrak{F}_3$ und der Anfang der Kraft $\mathfrak{F}_4$) unbekannt. Die fünfte Ecke des Kräftevielecks (das Ende der Kraft $\mathfrak{F}_4$) fällt mit der ersten zusammen, da das Kräftevieleck geschlossen sein muß. Sodann ziehen wir die Strahlen S_1, S_2, S_3; der Strahl S_4 bleibt unbekannt, der Strahl S_5 fällt mit dem Strahl S_1 zusammen. In Abb. 79 konstruieren wir ein Seileck. Wir ziehen die Seiten *1*, *2*, *3*; die Seite *4* ist unbekannt, Seite *5* jedoch liegt auf einer Geraden mit Seite *1*, da das Seileck geschlossen sein muß.

Verbinden wir durch eine Gerade den Schnittpunkt der Seite *3* und der Kraft $\mathfrak{F}_3$ mit dem Schnittpunkt der Seite *5* und der Kraft $\mathfrak{F}_4$, so erhalten wir die fehlende Seite *4* des Seilecks. Danach kehren wir zur Abb. 80 zurück und erhalten, indem wir durch den Pol *O* eine Gerade ziehen, die parallel zur Seite *4* des Seilecks liegt, den fehlenden Strahl S_4. Mit diesem Strahl bestimmt man die fehlende vierte Ecke des Kräftevielecks und folglich auch die Größe der gesuchten Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$.

§ 38. Über die Darstellung des Gleichgewichts eines Fadens

Wir müssen noch eine Erklärung für die Benennung „Seileck" geben. Verweilen wir bei der Frage der Darstellung des Gleichgewichts eines Fadens, dessen Enden an zwei festen Punkten befestigt sind und auf den Kräfte einwirken.

Wir nehmen an, daß sich der Faden MN, dessen Enden an zwei unbeweglichen Punkten M und N befestigt sind, unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, die an den Punkten A, B, C angreifen und auf einer durch die Punkte M und N gehenden Ebene liegen, im Gleichgewicht befindet (Abb. 81). Wir wollen zeigen, daß die Figur des Fadengleichgewichts ein Seileck für die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ ist.

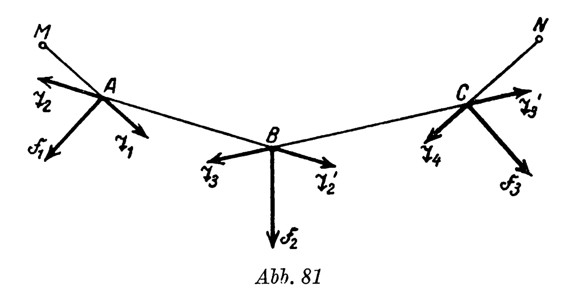


Abb. 81

Dazu muß man beweisen, daß man ein Vieleck aus den Kräften $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ konstruieren kann, dessen Strahlen parallel zu den Abschnitten MA, AB, BC, CN verlaufen. Um uns davon zu überzeugen, müssen wir die Zugkräfte der einzelnen Teilstücke des Fadens ermitteln. Um die Zugkraft der Abschnitte MA und AB zu finden, zerlegen wir die Kraft $\mathfrak{F}_1$ in zwei Komponenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, die an dem Punkt A angreifen und in Richtung der Geraden MA und AB verlaufen. Größe und Richtung der Kom-

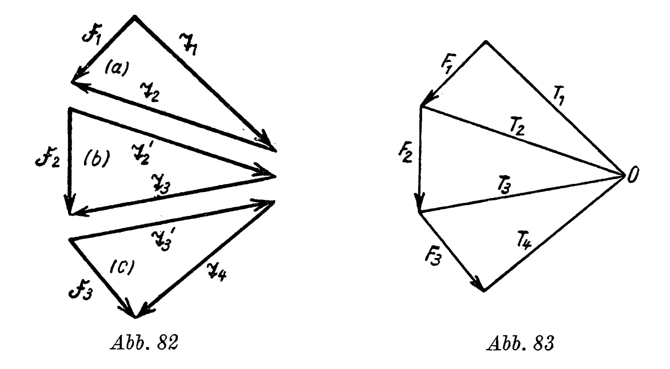


Abb. 82 *Abb. 83*

ponenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ finden wir nach der Regel des Kräftedreiecks. Dazu tragen wir in Abb. 82a einen Abschnitt ab, der der Kraft $\mathfrak{F}_1$ gleich und parallel ist, und ziehen durch den Anfang und das Ende dieses Abschnittes eine Gerade, die parallel den Geraden MA und AB ist. Wir erhalten so ein Kräftedreieck, aus dem wir auch die Komponenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ finden. In gleicher Weise zerlegen wir die Kraft $\mathfrak{F}_2$ in zwei Komponenten $\mathfrak{T}_3'$ und $\mathfrak{T}_3$, die an dem Punkte B angreifen und in Richtung der Geraden AB und BC verlaufen, und die Kraft $\mathfrak{F}_3$ in die Komponenten $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}_4$, die an dem Punkte C

angreifen und in Richtung der Geraden *BC* und *CN* verlaufen. Die entsprechenden Kräftedreiecke sind in Abb. 82b und 82c konstruiert.[1]

Wir bemerken jetzt, daß $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2'$ sein muß, da der Abschnitt *AB* des Fadens sich unter der Einwirkung der beiden Kräfte $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_2'$ im Gleichgewicht befindet. Genauso schließen wir aus dem Gleichgewicht des Teilstückes *BC*, daß $\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}'_3$ ist. Die Kräfte $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ sind die unbekannten Zugkräfte der Abschnitte *MA*, *AB*, *BC*, *CN*.

Wenden wir uns der Abb. 82 zu, so sehen wir, daß $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2'$ und $\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_3'$ ist, wenn wir das Dreieck (*b*) dem Dreieck (*c*) so zuordnen, daß die beiden Seiten $\mathfrak{T}_2'$ und $\mathfrak{T}_3$ zusammenfallen. Wir erhalten die Abb. 83, die das Vieleck der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ mit den Strahlen T_1, T_2, T_3, T_4 darstellt, wobei aus der Konstruktion hervorgeht, daß diese Strahlen parallel zu den Abschnitten *MA*, *AB*, *BC*, *CN* unseres Fadens sind.

Damit ist bewiesen, daß die Darstellung des Fadengleichgewichts ein Vieleck für die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ liefert, was die Benennung des „Seilecks“ erklärt.

KAPITEL VI

DIE BESTIMMUNG DER KRÄFTE IN DEN FACHWERKSTÄBEN

§ 39. Das Diagramm von MAXWELL-CREMONA

In diesem Kapitel zeigen wir die Anwendung der allgemeinen in den vorherigen Kapiteln dargelegten Verfahren zur Bestimmung der Kräfte in den Trägerteilen. In diesem Paragraphen legen wir eine graphische Lösungsmethode dieser Aufgabe dar, die der englische Physiker MAXWELL gezeigt und der italienische Mathematiker CREMONA bearbeitet hat.

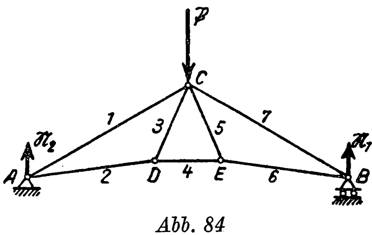


Abb. 84

Stellen wir uns einen Dachstuhl vor, der aus sieben gelenkigen Stäben besteht (Abb. 84). Wir setzen voraus, daß sich der Träger auf ein unbewegliches Auflager im Punkte *A* und auf ein bewegliches Auflager im Punkte *B* stützt. An dem Gelenkbolzen greift die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ an. Es sind die durch diese Belastung hervorgerufenen Kräfte in den Trägerstäben zu bestimmen.

Wir bemerken vor allem, wenn der Träger aus geraden Stäben besteht, die an ihren Enden miteinander verbunden sind, und wenn alle Verbindungen gelenkig sind und die äußeren Kräfte an den Gelenkbolzen angreifen, daß alle Sparren des

[1] In Abb. 81 sind die Kräfte $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2'$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_3'$, $\mathfrak{T}_4$ in kleinerem Maßstab dargestellt.

Trägers nur gezogen oder gedrückt werden können, krümmende Kräfte können nicht vorhanden sein. Wir betrachten z. B. den Stab CD unseres Trägers. An ihm greifen lediglich zwei Kräfte an, und zwar die Kräfte, die er von seiten der Gelenkbolzen C und D verspürt. Der Stab CD befindet sich jedoch im Gleichgewicht. Folglich müssen sich die beiden an ihm angreifenden Kräfte gegenseitig aufheben, d. h., sie müssen der Größe nach gleich und auf der Geraden CD entgegengesetzt gerichtet sein. Solche Kräfte werden unseren Stab entweder auf Zug oder Druck beanspruchen.

Da wir die Zug- oder Druckkräfte in den Trägerstäben bestimmen wollen, ermitteln wir zunächst vor allen Dingen die äußeren Kräfte, die an dem Träger angreifen. In der Anzahl der äußeren Kräfte sind erstens die aufgegebene Belastung $\mathfrak{P}$ und zweitens die Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ enthalten. Diese Reaktionen verlaufen vertikal nach oben und sind einander gleich (infolge der von uns vorausgesetzten Symmetrie des Trägers), so daß $N_1 = N_2 = {}^1/_2\, P$ ist. Allgemein könnten die Auflagerreaktionen graphisch nach der Methode des Seilecks gefunden werden (wie in § 37 erklärt).

Wenden wir uns jetzt der Bestimmung der Kräfte in den Stäben zu. Wir bezeichnen die Stäbe unseres Trägers mit den Ziffern *1* bis *7* (wie in Abb. 84 gezeigt) und werden die Zugkräfte mit dem Buchstaben T und der entsprechenden Ziffer des Sparrens bezeichnen (z. B. T_4), die Druckkräfte jedoch mit dem Buchstaben S und ebenfalls mit der entsprechenden Ziffer (z. B. S_7). Um diese Kräfte zu bestimmen, betrachten wir jene Kräfte, die an den Gelenkbolzen in den Knoten A, B, C, D, E unseres Trägers angreifen. Bestandteile dieser Kräfte sind einerseits die äußeren Kräfte, andererseits die Reaktionen der Stäbe. Da die Reaktionen der Stäbe den gesuchten Kräften in den Stäben gleich sind, wird die Frage auf die Bestimmung dieser Reaktionen zurückgeführt. Hinsichtlich dieser Stabreaktionen bemerken wir, wenn irgendein Stab, z. B. MN (Abb. 85), durch die an seinen Enden befindlichen Gelenkbolzen auf Zug beansprucht wird, daß die Reaktion des Stabes, die an dem Bolzen M angreift, vom Punkte M nach dem Punkte N verläuft, die Reaktion jedoch, die an dem Bolzen N angreift, verläuft von N nach M, d. h., die Reaktionen des Stabes verlaufen nach innen. Umgekehrt, wenn ein Stab von den Gelenkbolzen, die sich an seinen Enden befinden, auf Druck beansprucht wird, sind die Reaktionen des Stabes nach außen gerichtet. Es ist somit die Aufmerksamkeit auf diese Regel zu richten. Sie erlaubt die rasche Klärung, welche Trägerstäbe auf Zug und welche auf Druck beansprucht werden. Wir bemerken weiterhin, daß die Reaktionen, die an den an beiden Enden des Stabes befindlichen Bolzen angreifen, immer der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, gleichviel ob ein Stab auf Zug oder Druck beansprucht wird.

M N

Abb. 85

Da sich alle Träger und folglich auch alle Gelenkbolzen im Gleichgewicht befinden, müssen sich die Kräfte, die an jedem Gelenkbolzen angreifen, gegenseitig aufheben, d. h., das Vieleck dieser Kräfte muß geschlossen sein.

Wir werden nacheinander für alle Knoten unseres Trägers Kräftevielecke konstruieren. Es erweist sich als möglich, alle diese Vielecke in einer Abbildung zusammenzufassen. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Konstruktion, die das Diagramm von Maxwell-Cremona heißt. Aus diesem Diagramm lassen sich die Kräfte aller Trägerstäbe bestimmen.

Die Konstruktion des Diagramms führen wir in folgender Reihenfolge aus:

Wir bemerken, daß das Vieleck dieser Kräfte ebenfalls geschlossen sein muß, da sich die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ im Gleichgewicht befinden. Wir beginnen mit der Konstruktion des Vielecks der äußeren Kräfte. Dazu tragen wir vom Punkte A (Abb. 86) den Abschnitt ab ab, der der Größe nach gleich und parallel der Kraft $\mathfrak{P}$ ist, weiterhin tragen wir die Abschnitte bc und ca ab, die gleich und parallel den Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind.

Wir wenden uns jetzt dem Knoten A zu. An dem Bolzen A greifen die Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_2$ und die Reaktionen der Sparren *1* und *2* an. Das Vieleck dieser Kräfte muß geschlossen sein. Wir konstruieren dieses Vieleck. Die Auflagerreaktion $\mathfrak{N}_2$ ist in Abb. 86 durch den Abschnitt ca dargestellt. Von dem Ende a dieses Abschnittes aus tragen wir eine Gerade ab, die parallel dem Stab *1* ist. Von seinem Anfangspunkt c tragen wir eine Gerade ab, die parallel dem Stab *2* verläuft. Wir erhalten das geschlossene Vieleck $cadc$, welches das Vieleck der Kräfte ist, die an dem Bolzen A angreifen. Die Größen der Abschnitte ad und dc ergeben die Größen der Reaktionen der Stäbe *1* und *2* oder, was dasselbe ist, die unbekannten Kräfte in diesen Stäben. Da die Reaktion ad im Verhältnis zum Stab *1* nach außen verläuft, die Reaktion dc aber am Stab *2* nach innen, steht der Stab *1* unter Druck, während der Stab *2* gezogen wird. Folglich müssen die ermittelten Kräfte in diesen Stäben mit S_1 bzw. T_2 bezeichnet werden.

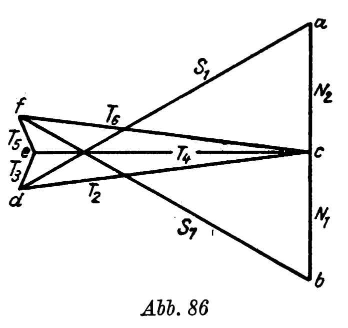


Abb. 86

Wir gehen zum Knoten D über. An dem Bolzen D greifen die Reaktionen der Stäbe *2*, *3* und *4* an. Wir wissen bereits, daß die Reaktion des Stabes *2*, die am Bolzen D angreift, gleich und entgegengesetzt der Reaktion desselben Stabes ist, die an dem Bolzen A angreift. Folglich ist in Abb. 86 die Reaktion des Stabes *2*, die an dem Bolzen D angreift, als Abschnitt cd dargestellt. Wir tragen vom Ende d dieses Abschnittes eine Gerade als Parallele zum Stab *3* ab und von seinem Anfang c eine Gerade als Parallele zum Stab *4*. So erhalten wir das geschlossene Vieleck $cdec$, das das Vieleck der Kräfte darstellt, die an dem Bolzen D angreifen. Die unbekannten Reaktionen der Stäbe *3* und *4* sind durch die Abschnitte de und ec dargestellt. Da beide Reaktionen am entsprechenden Stab nach innen verlaufen, werden beide Stäbe gezogen, und die in ihnen ermittelten Kräfte müssen mit T_3 und T_4 bezeichnet werden.

Gehen wir nun zum Knoten E über. Die Reaktion des Stabes *4*, die an dem Bolzen E angreift, ist in Abbildung 86 als Abschnitt ce dargestellt. Wenn wir durch die Punkte e und c Gerade ziehen, die parallel den entsprechenden Stäben *5* und *6* liegen, erhalten wir das geschlossene Vieleck der Kräfte $cefc$. Dessen Seiten ef und fc sind gleich den Reaktionen der Stäbe *5* und *6*. Beide Reaktionen verlaufen nach innen an den entsprechenden Stäben. Also werden die Stäbe *5* und *6* gezogen, die in ihnen ermittelten Kräfte bezeichnen wir mit T_5 und T_6.

Schließlich kommen wir zum Knoten B. Von drei Kräften, die an diesem Knoten angreifen (Auflagerreaktion $\mathfrak{N}_1$ und die Reaktionen der Stäbe *6* und *7*), sind uns zwei

Kräfte, und zwar die Auflagerreaktion $\mathfrak{R}_1$ und die Reaktion des Stabes *6* bereits bekannt. In Abb. 86 sind diese durch die Abschnitte *bc* und *cf* dargestellt. Es verbleibt nur noch die Schließung des Vielecks *bcf* durch den Abschnitt *fb*, damit wir die Reaktion des letzten Stabes *7* erhalten. Dieser Stab steht unter Druck, die Kraft in ihm ist mit S_7 bezeichnet.

Damit ist die Konstruktion des Diagramms abgeschlossen. Natürlich muß der Abschnitt *fb*, der die Reaktion des Stabes *7* darstellt, parallel zu diesem Stab verlaufen. Die Prüfung dieser Parallelität ergibt eine Kontrolle über die Richtigkeit der Konstruktion. Wir bemerken, daß wir bei der Konstruktion des Diagramms nicht die Gleichgewichtsbedingungen der an dem Bolzen *C* angreifenden Kräfte betrachtet haben. Es ist leicht zu sehen, daß das geschlossene Vieleck dieser Kräfte (der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Reaktionen der Stäbe *7*, *5*, *3*, *1*) auf dem Diagramm bereits vorhanden ist: Vieleck *abfeda*.

Die in Abb. 86 erhaltene Figur heißt Diagramm von MAXWELL-CREMONA und gibt ein vollständiges Bild der Kräfte in allen Stäben unseres Trägers. Im Diagramm haben wir in einer Abbildung die geschlossenen Kräftevielecke für sämtliche Knoten unseres Trägers. Allerdings könnte man diese Vielecke auch in einzelnen Abbildungen darstellen. Die Vereinfachung, die durch die Konstruktion des Diagramms erreicht wird, besteht darin, daß im Diagramm die Reaktion jedes Stabes (oder die Kraft in ihm) nur einmal (in Gestalt eines einzigen Abschnittes) erscheint. Man muß im Auge behalten, daß sich diese Vereinfachung lediglich dann erreichen läßt, wenn wir bei der Konstruktion des Vielecks der äußeren Kräfte (von denen aus wir die Konstruktion des Vielecks begannen) und der Kräftevielecke für die einzelnen Knoten des Trägers die Kräfte in einer bestimmten Reihenfolge anordnen. Diese Ordnung wird nach den folgenden Regeln bestimmt:

1. Wir gehen um die äußere Kontur des Trägers in einer bestimmten Richtung herum, z. B. im Uhrzeigersinn, und beobachten, in welcher Reihenfolge wir den äußeren Kräften begegnen, die an dem Träger angreifen. In dieser Reihenfolge tragen wir bei der Konstruktion des Vielecks der äußeren Kräfte die Kräfte ein. So begegnen wir in unserem Beispiel, indem wir die Kontur des in Abb. 84 dargestellten Trägers im Uhrzeigersinn umlaufen, den äußeren Kräften in folgender Reihenfolge: $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. In dieser Reihenfolge sind sie auch in Abb. 86 eingetragen.

2. Wir umkreisen jeden Knoten des Trägers, indem wir vollständig um den Knoten in der gleichen Richtung herumgehen wie beim Umgang der äußeren Kontur, und merken uns, in welcher Ordnung wir den Trägerstäben und ebenso den äußeren Kräften begegnen, wenn solche an dem Knoten angreifen. In dieser Ordnung tragen wir bei der Konstruktion des Kräftevielecks des gegebenen Knotens die Reaktionen der Stäbe und die äußeren Kräfte ein. So begegnen wir, wenn wir den Knoten *A* (Abb. 84) im Uhrzeigersinn umlaufen, den äußeren Kräften und den Trägerstäben in folgender Ordnung: $\mathfrak{R}_2$, *1*, *2*. In dieser Ordnung sind die Auflagerreaktionen $\mathfrak{R}_2$ und die Reaktionen der Stäbe *1* und *2* bei der Konstruktion des Vielecks *cadc* in Abb. 86 eingetragen. Wenn wir den Knoten *D* im Uhrzeigersinn umlaufen, begegnen wir den Trägerstäben in der Ordnung *2*, *3*, *4*; in derselben Ordnung sind die Reaktionen dieser Stäbe in das Vieleck *cdec* eingetragen usw.

Man muß bemerken, daß die äußeren Kräfte, die an den Trägerknoten angreifen, außerhalb der Trägerkontur eingezeichnet sein müssen (so wie in Abb. 84 die Belastung $\mathfrak{P}$ eingezeichnet ist).

Wir werden uns hier nicht mit der Begründung der beiden gezeigten Regeln aufhalten, sondern verweisen die Interessenten auf das bereits zitierte Werk von W. L. Kirpitschew „Die Grundlagen der graphischen Statik“. Wir bemerken nur, daß es nicht möglich ist, für jeden Träger ein Kräftediagramm zu konstruieren und daß die gezeigten Regeln nicht immer zum Ziele führen. Mit der Frage, welche Bedingungen ein Träger erfüllen muß, damit für ihn die Konstruktion des Diagramms von Maxwell-Cremona möglich ist, werden wir uns ebenfalls nicht aufhalten.

§ 40. Das Rittersche Verfahren

Wir legen das Rittersche Verfahren an folgendem Beispiel dar: Gegeben sei ein Brückenträger, der aus 19 Stäben besteht, die gelenkig miteinander verbunden sind (Abb. 87). Der Träger stützt sich auf ein festes Auflager im Punkte A und auf ein

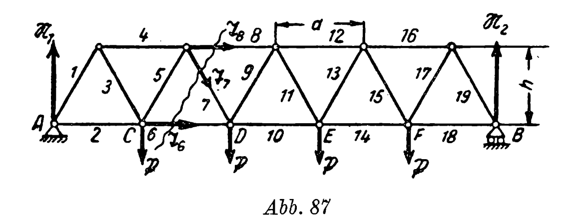


Abb. 87

bewegliches Auflager im Punkte B. An den Gelenkbolzen C, D, E und F sind gleiche vertikale Belastungen $\mathfrak{P}$ angelegt. Es sind die Kräfte in den Stäben zu bestimmen.

Die horizontalen Stäbe bilden den *oberen* und den *unteren Gurt* des Trägers, die schrägen Stäbe werden *Diagonalstreben* genannt. Wir setzen voraus, daß alle Stäbe der Ober- und Untergurte von gleicher Länge sind, und bezeichnen die Länge dieser Stäbe mit a; die Höhe des Trägers bezeichnen wir mit h. Die Länge aller Diagonalstreben nehmen wir auch als gleich an, die Diagonalstreben sind zur Horizontalen unter dem Winkel α geneigt, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{a}$$

bestimmt ist.

Ebenso wie bei der Konstruktion des Diagramms von Maxwell-Cremona beginnen wir mit der Bestimmung der Auflagerreaktionen. Wir finden die Auflagerreaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen, wie es in § 32 erklärt wurde. Im gegebenen Fall ist es offenbar, daß die Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ vertikal nach oben verlaufen und gleich sind. Da ihre Summe gleich $4P$ ist, müssen $N_1 = N_2 = 2P$ sein.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Kräfte in den Stäben über. Wir bezeichnen die Stäbe mit den Ziffern *1* bis *19* (wie es in Abb. 87 gezeigt ist). Nehmen wir an, daß wir die Kraft in dem Stab *8* bestimmen wollen.

Wir wenden die „Schnittmethode" an, von der in § 9 die Rede war. Wir legen in Gedanken den Schnitt an, der den Stab *8* und zwei andere Stäbe (Stab *6* und *7*) zerschneidet. Dieser Schnitt zerlegt den Träger in zwei Teile, in einen linken und einen rechten Teil. Wir werden die Gleichgewichtsbedingungen eines dieser Teile betrachten, z. B. des linken Teiles.

Untersuchen wir, welche Kräfte auf den linken Trägerteil einwirken. An ihm greifen in den Knoten A und C die Auflagerreaktionen $\mathfrak{N}_1$ und die Belastung $\mathfrak{P}$ an. Außerdem greifen an den Punkten, an denen die Stäbe *6*, *7* und *8* zerschnitten sind, Kräfte an, die die Einwirkung des rechten Trägerteils auf den linken darstellen. Diese Kräfte erscheinen als innere Kräfte in bezug auf den gesamten Träger; in bezug auf den linken Trägerteil sind sie jedoch äußere Kräfte. Sie sind nichts anderes als die gesuchten Kräfte (die Zug- oder Druckkräfte) in den Stäben *6*, *7* und *8*. Wir vereinbaren die weiteren Berechnungen unter der Voraussetzung, daß sämtliche Stäbe unseres Trägers gezogen werden, d. h., die Kräfte in allen Stäben seien Zugkräfte. Wird in Wirklichkeit irgendein Stab gedrückt, so erhalten wir für die Kraft in ihm eine negative Größe. Demgemäß werden wir alle Kräfte mit dem Buchstaben T bezeichnen (mit der entsprechenden Ziffer des Stabes als Index), wobei wir daran denken, daß die positiven Kräfte Zugkräfte sind, die negativen dagegen Druckkräfte. Da wir die Stäbe *6*, *7* und *8* als gezogen annehmen, richten wir die Kräfte $\mathfrak{T}_6$, $\mathfrak{T}_7$ und $\mathfrak{T}_8$, die an dem linken Trägerteil angreifen, wie es Abb. 87 zeigt.

Der linke Trägerteil befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung von fünf Kräften: $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{T}_6$, $\mathfrak{T}_7$ und $\mathfrak{T}_8$. Folglich müssen diese Kräfte die Gleichgewichtsgleichungen befriedigen.

Wir wählen eine Gleichgewichtsgleichung, die nur eine unbekannte Kraft enthält, nämlich die uns interessierende Kraft $\mathfrak{T}_8$. Dazu stellen wir die Gleichung der Momente bezüglich des Knotens D auf, in dem die von uns zerschnittenen Stäbe *6* und *7* zusammentreffen. Wir erhalten die Gleichungen:

$$-N_1 \cdot 2a - T_8 h + Pa = 0,$$

oder, da $N_1 = 2P$,

$$3Pa + T_8 h = 0,$$

woraus

$$T_8 = -3P\frac{a}{h}$$

folgt.

Da wir eine negative Kraft erhalten haben, ist Stab *8* ein Druckstab.

Genauso können wir die Kräfte in den Stäben *6* und *7* ermitteln. Wir schreiben die Momentengleichungen bezüglich des Knotens des Obergurtes auf, in dem die Stäbe *7* und *8* zusammentreffen, und erhalten:

$$-N_1\frac{3}{2}a + P \cdot \frac{1}{2}a + T_6 h = 0,$$

woraus

$$T_6 = \frac{5}{2} P \frac{a}{h}$$

folgt. Da sich die Stäbe *6* und *8* nicht schneiden, kann man keine Momentengleichungen aufschreiben, aus denen die Kräfte $\mathfrak{T}_6$ und $\mathfrak{T}_8$ ausgeschlossen wären. Wir stellen die Gleichung der Projektionen auf die vertikale Achse auf, wobei wir diese Achse nach oben richten, und erhalten eine Gleichung, die die eine Unbekannte T_7 enthält:

$$N_1 - P - T_7 \sin\alpha = 0,$$

woraus

$$T_7 = \frac{P}{\sin\alpha}$$

folgt. Da T_6 und T_7 positiv sind, herrschen in den Stäben *6* und *7* Zugkräfte.

Wenn wir andere Schnitte führen, könnten wir in der gleichen Weise die Kräfte in allen Stäben unseres Trägers bestimmen (was wir auch dem Leser empfehlen). Wie ersichtlich, besteht die Nützlichkeit der Ritterschen Methode darin, daß sie erlaubt, die Kraft in einem beliebigen Trägerstab sofort zu bestimmen, ohne zuvor die Berechnung der Kräfte in den anderen Stäben durchgeführt zu haben.

KAPITEL VII

DIE ADDITION VON KRÄFTEN, DIE AN EINEM PUNKTE ANGREIFEN UND NICHT IN EINER EBENE LIEGEN

§ 41. Das Kräftepolygon. Das Kräfteparallelepiped

Wir gehen zur Untersuchung der Frage der Addition und des Gleichgewichts solcher Kräfte über, die an einem starren Körper angreifen und nicht in einer Ebene liegen. In diesem Kapitel betrachten wir Kräfte, die an einem Punkte angreifen.

Nehmen wir an, im Punkte A greifen die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ an (Abb. 88). Es sei die Addition dieser Kräfte gefordert.

Wir addieren die Kräfte in ihrer Reihenfolge. Zuerst addieren wir die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und finden nach der Regel des Kräftedreiecks ihre Resultierende $\mathfrak{R}_1$. Sodann addieren wir die Kräfte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ und finden mittels Kräftedreieck ihre Resultierende $\mathfrak{R}_2$. Schließlich finden wir, indem wir die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{F}_4$ addieren, ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, die die gesuchte Resultierende aller gegebenen Kräfte ist. Wie aus

Abb. 88 ersichtlich ist, stellt die Resultierende $\mathfrak{R}$ die schließende Seite des Vielecks dar, das aus den gegebenen Kräften $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ konstruiert ist, d. h., sie ist der Vektorensumme dieser Kräfte gleich.[1]

Die dargelegte Erwägung bleibt bei jeder beliebigen Anzahl von gegebenen Kräften gültig. *Wir folgern, daß die Resultierende einer beliebigen Anzahl von an einem Punkte angreifenden Kräften an demselben Punkte angreift und gleich der Vektorensumme der gegebenen Kräfte ist.*

Somit werden die an einem Punkte angreifenden (und nicht in einer Ebene liegenden) Kräfte nach der Regel des Kräftevielecks addiert.

Verweilen wir bei der Betrachtung von drei Kräften, die an einem Punkte angreifen und nicht in einer Ebene liegen. In diesem Sonderfall kann man die Regel der Kräftezusammenlegung etwas anders formulieren. Nehmen wir an, daß die an dem

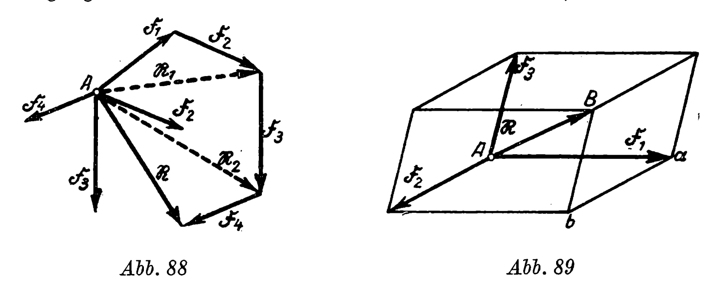


Abb. 88 *Abb. 89*

Punkte A angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ nicht in einer Ebene liegen (Abb. 89). Wir konstruieren aus diesen Kräften ein Parallelepiped: Wir ziehen eine Diagonale des Parallelepipeds AB und schreiben dieser Diagonalen die Richtung vom Punkte A nach dem Punkte B zu. Dann wird durch die Diagonale AB die Resultierende $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte dargestellt. Tatsächlich ist der Abschnitt AB die schließende Seite des Vielecks $AabB$. Da dieses Vieleck nichts anderes ist als das Vieleck der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, stellt der Abschnitt AB, in Übereinstimmung mit dem oben Bewiesenen, die Resultierende dieser Kräfte dar. Die dargelegte Regel von der Addition dreier Kräfte, die an einem Punkte angreifen und nicht in einer Ebene liegen, heißt die *Regel des Kräfteparallelepipeds.*

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl von Kräften, die an einem Punkte angreifen. Die Kräfte, die an einem Punkte angreifen, befinden sich im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ gleich Null ist. Folglich kann man die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte, die an einem Punkte angreifen, in folgender Weise formulieren:

Mehrere Kräfte, die an einem Punkte angreifen, befinden sich im Gleichgewicht, wenn das Vieleck dieser Kräfte geschlossen ist. Anders gesagt: Die Kräfte, die an einem Punkte angreifen, befinden sich im Gleichgewicht, wenn ihre Vektorensumme gleich Null ist.

[1] Es ist zu bemerken, daß auch die Seiten des Vielecks der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, da diese als nicht in einer Ebene liegend angenommen sind, nicht in einer Ebene liegen.

§ 42. Die Projektion der Kraft auf eine Achse. Die Zerlegung des Vektors in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen

Wir stellen jetzt die Gleichungen für die Berechnung der Resultierenden mehrerer Kräfte auf, die an einem Punkte angreifen. Zunächst wollen wir jedoch bei dem Begriff der Projektion der Kräfte auf eine Achse verweilen.

Gegeben ist die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkte A angreift und die Achse x, die in Richtung des Pfeiles (Abb. 90) verläuft. Wir setzen voraus, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ und die x-Achse nicht in einer Ebene liegen. Wir legen durch den Punkt A eine Gerade, die parallel zur x-Achse und mit ihr in gleicher Richtung verläuft. Vom Ende B der Kraft $\mathfrak{F}$ fällen wir das Lot Bb auf diese Gerade.

Die Größe des Abschnittes Ab, dem wir die Richtung vom Punkte A nach dem Punkte b zuschreiben, heißt *Projektion der Kraft* $\mathfrak{F}$ auf die x-Achse. Wir

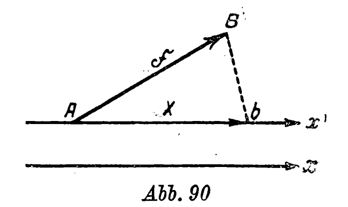


Abb. 90

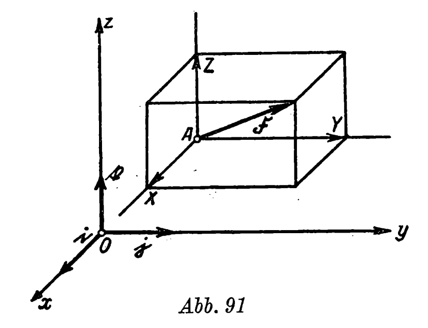


Abb. 91

bezeichnen die Projektion mit dem Buchstaben X und bewerten sie positiv, wenn der Verlauf des Abschnittes Ab mit dem Verlauf der x-Achse zusammenfällt. Verläuft jedoch die Richtung des Abschnittes Ab entgegengesetzt zur x-Achse, so bewerten wir sie als negativ.

Aus dem Dreieck ABb folgt, daß $X = F \cos(\mathfrak{F}, x)$, wobei $(\mathfrak{F}, x)$ der Winkel ist, der von der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ und der Richtung der x-Achse gebildet ist. Wir bemerken, daß $X = 0$, wenn

$$(\mathfrak{F}, x) = 90^\circ$$

ist.

Wir nehmen an, daß eine Kraft $\mathfrak{F}$ gegeben ist, die an dem Punkte A angreift (Abb. 91). Dann betrachten wir drei zueinander senkrechte Achsen x, y und z und zerlegen die Kraft $\mathfrak{F}$ in drei Komponenten, die parallel zu diesen Achsen verlaufen. Dazu konstruieren wir bei dem Punkte A ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel zu den Achsen x, y und z sind und in dem die Kraft $\mathfrak{F}$ als Diagonale erscheint. Die Kanten dieses rechtwinkligen Parallelepipeds stellen die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ in Richtung der Achsen x, y und z dar. Die Beträge der Komponenten (die mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen sind, das positiv ist, wenn die Richtung der Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Richtung der Achsen x, y und z zusammenfällt, und negativ im entgegengesetzten Falle) sind jedoch gleich den Projektionen der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Achsen x, y und z. Wir bezeichnen diese Projektionen mit den Buchstaben X, Y, Z.

Wenn wir die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen x, y und z mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnen, können wir die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ in Richtung der Achsen x, y und z in Form der Produkte $X\mathfrak{i}$, $Y\mathfrak{j}$, $Z\mathfrak{k}$ darstellen. Auf diese Weise kommen wir zu der Gleichung

$$\mathfrak{F} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k},$$

die wir *Zerlegung der Kraft* $\mathfrak{F}$ *in die Komponenten in Richtung der Achsen* x, y *und* z nennen.

Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Formel auch zur Zerlegung eines beliebigen Vektors in die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen angewendet werden kann. Wir können tatsächlich einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ in drei Komponenten in Richtung der zueinander senkrechten Achsen x, y und z zerlegen. Da die Größe dieser Komponenten, die mit den entsprechenden Vorzeichen versehen sind, gleich den Projektionen a_x, a_y und a_z des Vektors auf die Achsen x, y und z ist, die Richtungen der Komponenten aber mit den Richtungen dieser Achsen zusammenfallen, erhalten die uns interessierenden Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ den Ausdruck $a_x\mathfrak{i}$, $a_y\mathfrak{j}$, $a_z\mathfrak{k}$, wobei $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren sind, die in Richtung der Achsen x, y und z verlaufen. Der gegebene Vektor $\mathfrak{a}$ ist die Summe seiner Komponenten, d. h.

$$\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}.$$

Diese Formel werden wir die *Zerlegungsformel eines Vektors in die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen* nennen. Wir bemerken jetzt, daß es leicht ist, Größe und Verlauf der Kraft $\mathfrak{F}$ zu bestimmen, wenn wir die Projektionen X, Y, Z kennen. Tatsächlich sind, da sich die Kraft $\mathfrak{F}$ als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds darstellt, dessen Kanten gleich den absoluten Größen X, Y und Z. Deshalb ist

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{1}$$

Weiter gelten für die Projektionen X, Y und Z die Gleichungen

$$X = F\cos(\mathfrak{F}, x), \qquad Y = F\cos(\mathfrak{F}, y), \qquad Z = F\cos(\mathfrak{F}, z),$$

woraus folgt:

$$\cos(\mathfrak{F}, x) = \frac{X}{F}, \qquad \cos(\mathfrak{F}, y) = \frac{Y}{F}, \qquad \cos(\mathfrak{F}, z) = \frac{Z}{F}. \tag{2}$$

Mit Hilfe der Formeln (1) und (2) bestimmt man Größe und Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$, wenn ihre Projektionen X, Y und Z bekannt sind.

§ 43. Die Bestimmung der Resultierenden der an einem Punkte angreifenden Kraft nach der Projektionsmethode. Die Gleichgewichtsgleichungen

Wir benutzen die Überlegungen, die wir am Ende des vorigen Paragraphen dargelegt haben, zur Bestimmung der Resultierenden von Kräften, die an einem Punkte angreifen.

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an einem Punkte A angreifen (Abb. 92). Es wird die Berechnung der Größe und Richtung ihrer Resultierenden $\mathfrak{R}$ gefordert.

Wir betrachten drei zueinander senkrechte Achsen x, y und z. Die Resultierende $\mathfrak{R}$ ist gleich der Summe der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Eingedenk des Satzes von der Projektion der Summe beliebiger Vektoren schließen wir, daß die *Projektion der Resultierenden $\mathfrak{R}$ auf irgendeine Achse gleich der Summe der Projektionen der Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf dieselbe Achse ist.*

Daher gilt, wenn wir die Projektionen der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf die Achsen x, y und z mit $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n$ bezeichnen und die Projektionen der Resultierenden $\mathfrak{R}$ auf dieselben Achsen mit X, Y, Z:

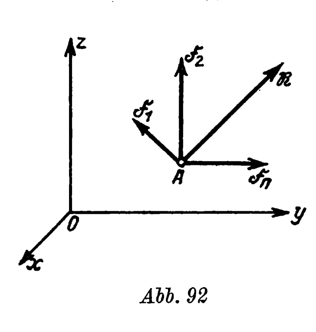


Abb. 92

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

Die hier enthaltenen Projektionen der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ errechnet man nach den Formeln

$$X_i = F_i \cos(\mathfrak{F}_i, x),$$
$$Y_i = F_i \cos(\mathfrak{F}_i, y),$$
$$Z_i = F_i \cos(\mathfrak{F}_i, z),$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, n$ ist.

Nachdem wir die Projektionen der Resultierenden X, Y, Z berechnet haben, ermitteln wir nun Größe und Verlauf der Resultierenden nach den Formeln

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(\mathfrak{R}, x) = \frac{X}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}, y) = \frac{Y}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}, z) = \frac{Z}{R}.$$

Wir sahen, daß sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an einem Punkte angreifen, im Gleichgewicht befinden, wenn ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ gleich Null ist. Aus der Gleichung

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

folgt jedoch, daß $\mathfrak{R} = 0$ ist, wenn $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Gemäß den Gleichungen, die für die Projektionen der Resultierenden X, Y und Z gelten, folgern wir, daß sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an einem Punkte angreifen, im Gleichgewicht befinden, wenn die Gleichungen

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$
$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = 0$$

befriedigt sind.

Diese Gleichungen heißen *Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte*, die an einem Punkte angreifen.

KAPITEL VIII

DIE ADDITION VON KRÄFTEPAAREN IM RAUM

§ 44. Die Äquivalenzbedingungen für Kräftepaare

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Addition von Kräftepaaren, die nicht in einer Ebene liegen, beschäftigen. Vorerst haben wir jedoch die Betrachtungen über die Kräftepaare zu ergänzen, die im Kapitel III dargelegt worden sind.

In § 22 wurde bewiesen, daß zwei Kräftepaare, die in einer Ebene liegen, äquivalent sind, wenn ihre Momente (der Größe und dem Vorzeichen nach) gleich sind. Mit anderen Worten, zwei Kräftepaare sind äquivalent, wenn sie in einer Ebene liegen und der Größe nach gleiche Momente und gleiche Drehrichtung haben. Wir zeigen nun, *daß zwei Kräftepaare äquivalent sind, wenn sie auf parallelen Ebenen liegen und der Größe nach gleiche Momente und gleiche Drehrichtung haben.*

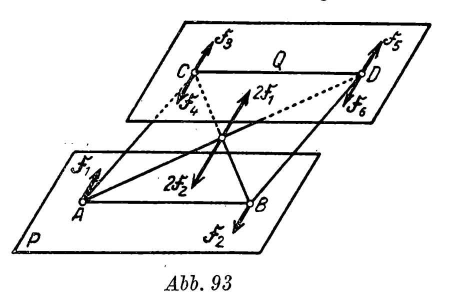


Abb. 93

Angenommen, das Kräftepaar $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ (wobei $F_1 = F_2 = F$) mit dem Hebelarm AB sei gegeben und liege in der Ebene P (Abb. 93). Wir betrachten die Ebene Q, die parallel zur Ebene P ist, und beweisen, daß man, ohne das Gleichgewicht zu stören, das gegebene Kräftepaar durch ein beliebiges, in der Ebene Q liegendes Kräftepaar ersetzen kann. Hierzu müssen die Bedingungen erfüllt sein, daß das Moment dieses zweiten Kräftepaares der Größe nach gleich dem Moment des gegebenen Kräftepaares ist und seine Drehrichtung mit der Drehrichtung des gegebenen Kräftepaares zusammenfällt.

Um uns hiervon zu überzeugen, werden wir zuerst zeigen, daß man, ohne das Gleichgewicht zu stören, das gegebene Kräftepaar so in der Ebene Q verschieben kann, daß der Hebelarm des Kräftepaares parallel zu sich selbst verbleibt.

Wir nehmen in der Ebene Q den Abschnitt CD an, der gleich und parallel dem Abschnitt AB ist. An den Punkten C und D lassen wir die sich gegenseitig aufhebenden Kräfte $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_5$, $\mathfrak{F}_6$ angreifen, die der Größe nach gleich und parallel den Kräften des gegebenen Kräftepaares sind ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F$). Wir addieren die Kraft $\mathfrak{F}_1$, die an dem Punkte A angreift, und die Kraft $\mathfrak{F}_5$. Da diese Kräfte gleich und parallel sind und nach einer Richtung verlaufen, ist ihre Resultierende der Größe nach gleich $2\,F$. Sie ist ihnen parallel und nach derselben Seite gerichtet, ihr Angriffspunkt teilt den Abschnitt AD in der Mitte. Genau so erhalten wir, wenn wir die an dem Punkte B angreifende Kraft $\mathfrak{F}_2$ und die Kraft $\mathfrak{F}_4$ addieren, ihre Resultierende, die der Größe nach gleich $2\,F$, ihnen parallel und nach derselben Seite wie diese Kräfte gerichtet ist: Der Angriffspunkt dieser Resultierenden teilt den Abschnitt BC in der Mitte. Die Abschnitte AD und BC werden

im Schnittpunkt halbiert (als Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$). Folglich greifen beide Resultierenden, die der Größe nach gleich $2F$ sind, an einem Punkte an und heben sich also gegenseitig auf.

Es sind nun noch die Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_6$ zu betrachten, die ein Paar mit dem Hebelarm CD bilden.

Folglich ist das gegebene Kräftepaar $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ ersetzt durch das Kräftepaar $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_6$, d. h., es ist verlegt nach der Ebene Q, wobei der Hebelarm des Kräftepaares parallel zu sich selbst geblieben ist.

Wir stellen jetzt fest, daß in der Ebene Q das Kräftepaar $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_6$ durch jedes andere Kräftepaar mit gleichem Moment und gleicher Drehrichtung ersetzt werden kann. Hieraus folgern wir, daß man das gegebene Kräftepaar $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, das in der Ebene P liegt, durch jedes andere Kräftepaar, das in der Ebene Q liegt, ersetzen kann, dessen Moment gleich dem Moment des gegebenen Kräftepaares ist und dessen Drehrichtung mit der Drehrichtung des gegebenen Kräftepaares zusammenfällt.

§ 45. Das Moment des Kräftepaares als Vektor

Im weiteren werden wir das Moment des Kräftepaares als Vektorgröße betrachten, d. h., wir werden dem Moment des Kräftepaares nicht nur eine bestimmte Größe, sondern auch eine bestimmte Richtung zuschreiben.

Es sei das Kräftepaar $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ mit dem Hebelarm $AB = p$ gegeben, das in der Ebene P liegt (Abb. 94). Dem Moment des Kräftepaares schreiben wir den absoluten Betrag

$$m = Fp$$

zu und bestimmen die Richtung des Momentes des Kräftepaares in folgender Weise: In einem beliebigen Punkte, z. B. im Punkte O, der den Abschnitt AB halbiert, errichten wir eine Senkrechte auf der Ebene P des Kräftepaares. Wir tragen die Größe des Momentes des Kräfte-

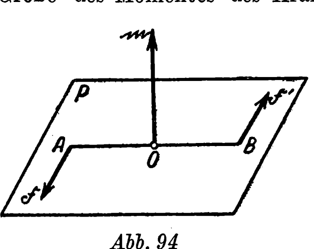


Abb. 94

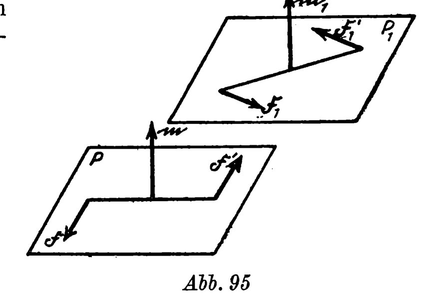


Abb. 95

paares m vom Punkte O aus auf dieser Senkrechten ab, und zwar derartig, daß ein Beobachter, der auf dem von uns abgetragenen Moment steht, den Eindruck hat, das Kräftepaar drehe die Ebene P gegen die Uhrzeigerrichtung.

Wir vereinbaren, die Größe des Momentes des Kräftepaares jetzt immer als positiv anzusehen.

Das Moment des Kräftepaares, als Vektor betrachtet, werden wir mit dem Buchstaben $\mathfrak{m}$ bezeichnen.

Unter Benutzung der erwähnten Bestimmung des Moments des Kräftepaares als Vektorgröße erhalten wir eine neue Formulierung der Äquivalenzbedingung des Kräftepaares. Wir nehmen an, in den parallelen Ebenen P und P_1 seien die äquivalenten Kräftepaare $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ mit dem Hebelarm p und $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$ mit dem Hebelarm p_1 gegeben (Abb. 95).

Wir tragen die Momente $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ dieser Kräftepaare ab und überzeugen uns, daß diese Momente nicht nur der Größe nach gleich sind, sondern auch parallel und nach derselben Seite gerichtet sind, d. h., sie sind als Vektoren gleich. Auf diese Weise kommen wir zu folgender Formulierung der Äquivalenzbedingung des Kräftepaares:

Zwei Kräftepaare sind äquivalent, wenn ihre Momentenvektoren gleich sind.

Diesen Satz kann man auch in folgender Weise formulieren: Man kann das Moment eines Kräftepaares nach einem beliebigen Punkte des Raumes verlegen (unter Beibehaltung seiner Richtung), ohne daß das Gleichgewicht gestört wird.

§ 46. Die Addition der Kräftepaare. Die Gleichgewichtsbedingung der Kräftepaare

Im Kapitel III ist die Addition von Kräftepaaren in einer Ebene betrachtet worden. Auf diesen Fall wird auch die Addition der Kräftepaare, die in parallelen Ebenen liegen, zurückgeführt, da die in parallelen Ebenen liegenden Kräftepaare in eine Ebene verschoben werden können.

Wir setzen jetzt voraus, daß zwei Kräftepaare gegeben seien, die in den sich schneidenden Ebenen P und Q liegen (Abb. 96). Diese Kräftepaare sollen addiert werden.

Wir bezeichnen die Kräfte, die ein Paar bilden, das in der Ebene P liegt, mit $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und nehmen an, daß $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ ist. Wir ordnen dieses Kräftepaar so an, daß die Kraft $\mathfrak{F}_1$ an dem Punkte A angreift, der auf der Schnittlinie KL der Ebenen P und Q liegt, und daß sie auf der Geraden KL verläuft. In solchem Falle ist der Hebelarm dieses Paares $AB = p$ senkrecht zur Geraden KL gerichtet.

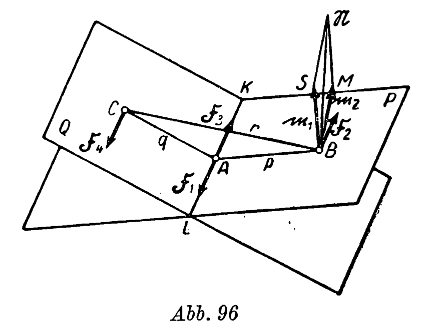


Abb. 96

Das in der Ebene Q liegende Kräftepaar verändern wir derart, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$, die dieses Paar bilden, zahlenmäßig gleich $\mathfrak{F}$ sind. Dann ordnen wir dieses Kräftepaar so an, daß eine der Kräfte dieses Paares, z. B. $\mathfrak{F}_3$, im Punkte A angreift und auf der Geraden KL nach der Seite gerichtet ist, die der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}_1$ entgegengesetzt ist. In solchem Falle wird der Hebelarm des zweiten Kräftepaares $AC = q$ ebenfalls lotrecht zur Geraden KL verlaufen.

Die beiden an dem Punkte A angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_3$, die der Größe nach gleich sind und auf einer Geraden nach entgegengesetzten Seiten verlaufen, heben sich gegenseitig auf. Folglich erhalten wir als Ergebnis der Addition der gegebenen Kräftepaare ein neues Kräftepaar $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_4$ mit dem Hebelarm BC, das wir *resultierendes Kräftepaar* nennen. Wir bezeichnen den Hebelarm BC mit dem Buchstaben r.

Wir werden jetzt zeigen, daß *das Moment des resultierenden Kräftepaares gleich der Summe der Momente der Komponentenkräftepaare ist.*

Die Momente $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ der Komponentenkräftepaare haben folgende Größe:

$$m_1 = Fp \quad \text{und} \quad m_2 = Fq.$$

Da die Momente der Kräftepaare nach einem beliebigen Punkte des Raumes verlegt werden können, verschieben wir die Momente nach dem Punkte B und bemerken, daß das Moment $\mathfrak{m}_1$ senkrecht zur Ebene P, das Moment $\mathfrak{m}_2$ aber senkrecht zur Ebene Q steht.

Wir konstruieren ein Parallelogramm aus den Momenten $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ und ziehen eine Diagonale BN. Es läßt sich zeigen, daß BN das Moment des resultierenden Paares ist.

Zu diesem Zweck müssen wir beweisen: 1., daß $BN = Fr$ ist, 2., daß der Abschnitt BN senkrecht zur Ebene des resultierenden Paares liegt, und 3., daß für den Beobachter, der auf dem Vektor BN steht, das resultierende Paar so erscheint, als drehe es die eigene Ebene gegen den Uhrzeiger.

1. Wir stellen fest, daß die Dreiecke ABC und BSN einander ähnlich sind, denn die Seiten BS und SN sind den Seiten AB und AC proportional ($m_1 : m_2 = Fp : Fq = p : q$) und $\angle BSN$ und $\angle CAB$ sind ebenfalls gleich (die Erzeugenden des einen Winkels stehen senkrecht auf denen des anderen). Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt, daß

$$\frac{BN}{m_1} = \frac{r}{p},$$

und daraus

$$BN = m_1 \frac{r}{p} = Fp \frac{r}{p} = Fr.$$

2. Um zu beweisen, daß der Abschnitt BN senkrecht zur Ebene des resultierenden Paares steht, genügt es, zu zeigen, daß dieser Abschnitt senkrecht zur Kraft $\mathfrak{F}_2$ und zu dem Hebelarm BC steht.

Wir bemerken, daß $\mathfrak{m}_1 \perp \mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{m}_2 \perp \mathfrak{F}_2$ ist. Folglich steht die Ebene des Parallelogramms $BMNS$ senkrecht auf der Kraft $\mathfrak{F}_2$ und also auch die Diagonale BN senkrecht auf $\mathfrak{F}_2$.

Andererseits gilt:

$$\angle SBA = 90^\circ, \qquad \angle CBA = \angle SBN,$$

woraus

$$\angle CBN = 90^\circ$$

folgt, d. h., die Diagonale BN steht senkrecht auf dem Hebelarm BC.

Also steht die Diagonale BN senkrecht auf der Ebene des resultierenden Paares.

3. Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß sich dem Beobachter, der auf dem Vektor BN steht, das resultierende Kräftepaar so darstellt, als drehe es die eigene Ebene entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.

Aus allem Gesagten folgt, daß der Vektor BN das Moment des resultierenden Kräftepaares ist.

Somit wird das Moment des resultierenden Kräftepaares als Diagonale des Parallelogramms dargestellt, das aus den Momenten der Komponentenkräftepaare konstruiert ist. Anders gesagt: *Das Moment des resultierenden Paares ist gleich der Summe der Momente der Komponentenkräftepaare.*

Diese Regel der Addition der Momente der Kräftepaare kann man *Regel des Parallelogramms der Momente* nennen. Natürlich kann die Konstruktion eines Parallelogramms der Momente durch die Konstruktion eines Dreiecks der Momente ersetzt werden, genau so, wie die Konstruktion des Kräfteparallelogramms durch die Konstruktion des Kräftedreiecks ersetzt werden kann.

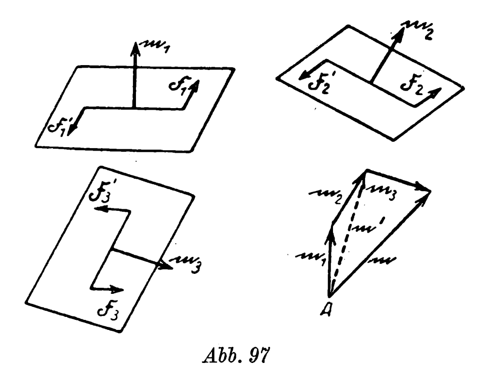


Abb. 97

Mit Hilfe der bewiesenen Regel der Addition zweier Kräftepaare kann auch die umgekehrte Aufgabe gelöst werden: die Zerlegung des gegebenen Kräftepaares in zwei Komponentenkräftepaare. Um diese Zerlegung durchzuführen, genügt es, das Moment des gegebenen Kräftepaares in zwei Komponenten zu zerlegen, wobei entweder ein Parallelogramm der Momente oder ein Momentendreieck konstruiert wird.

Wir setzen jetzt voraus, daß einige Kräftepaare gegeben sind, die beliebig im Raume liegen, und daß die Addition dieser Kräftepaare gefordert wird.

Wir nehmen an, die Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$; $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$; $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3'$ seien gegeben (Abb. 97). Hierbei beschränken wir uns auf die Betrachtung von drei Kräftepaaren. Die Überlegung ist jedoch für jede beliebige Anzahl von Kräftepaaren richtig.

Wir stellen die Momente der gegebenen Kräftepaare $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ auf. Sodann addieren wir die ersten beiden Kräftepaare. Zu diesem Zweck konstruieren wir ein Dreieck aus den Momenten, indem wir das Moment $\mathfrak{m}_1$ vom willkürlichen Punkt a abtragen und vom Ende dieses Momentes einen Abschnitt abtragen, der der Größe nach gleich und parallel dem Moment $\mathfrak{m}_2$ ist. Die abschließende Seite $\mathfrak{m}'$ ist das Moment des Kräftepaares, das wir durch die Addition der Kräftepaare $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$ und $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$ erhalten haben. Das erhaltene Paar addieren wir zu dem Paar $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3'$.

Indem wir abermals die Regel des Momentendreiecks anwenden, tragen wir vom Ende des Momentes $\mathfrak{m}'$ einen Abschnitt ab, der der Größe nach gleich und parallel dem Moment $\mathfrak{m}_3$ ist. Die abschließende Seite $\mathfrak{m}$ ist das Moment des Kräftepaares, das wir durch die Addition aller drei gegebenen Kräftepaare erhalten.

Aus dem Gesagten folgt, daß sich durch die Addition mehrerer Kräftepaare, die ganz beliebig im Raume liegen, ein neues Kräftepaar ergibt, das *resultierendes Kräftepaar* genannt wird.

Das Moment des resultierenden Kräftepaares wird durch die Schlußseite des Vielecks dargestellt, das aus den Momenten der Komponenten-Kräftepaare konstruiert ist. Anders gesagt: Das Moment des resultierenden Kräftepaares ist gleich der Summe der Momente der Komponenten-Kräftepaare.

Die beliebig im Raume liegenden Kräftepaare befinden sich im Gleichgewicht, wenn das Moment ihres resultierenden Kräftepaares gleich Null ist. Folglich kann man die Gleichgewichtsbedingungen der Kräftepaare, die beliebig im Raume liegen, in folgender Weise formulieren: *Die beliebig im Raume liegenden Kräftepaare befinden sich im Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Momente gleich Null ist.*

KAPITEL IX

DAS MOMENT IN BEZUG AUF EINEN PUNKT UND IN BEZUG AUF EINE ACHSE

§ 47. Das Moment in bezug auf einen Punkt

Dem Begriff des Momentes in bezug auf einen Punkt sind wir bereits in der „Statik der Ebene" begegnet. Jetzt modifizieren wir etwas die Definition dieses Begriffes, die in § 24 gegeben wurde. Wir werden nämlich das Moment der Kräfte in bezug auf einen Punkt als Vektorgröße betrachten, d. h., wir werden dem Moment nicht nur eine bestimmte Größe, sondern auch eine bestimmte Richtung zuschreiben.

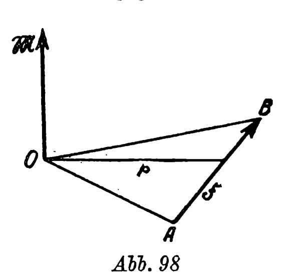


Abb. 98

Nehmen wir an, die Kraft $\mathfrak{F}$ und der Punkt O seien gegeben (Abb. 98). Wir fällen vom Punkte O das Lot auf die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$, die Länge des Armes bezeichnen wir mit dem Buchstaben p.

Dem *Moment der Kraft* $\mathfrak{F}$ *bezüglich des Punktes* O (wir bezeichnen dieses Moment mit dem Buchstaben $\mathfrak{M}$) werden wir die Größe

$$M = F p$$

zuschreiben. Den Verlauf des Momentes $\mathfrak{M}$ bestimmen wir auf folgende Weise:

Wir errichten im Punkte O eine Senkrechte zur Ebene, in welcher der Punkt O und die Kraft $\mathfrak{F}$ liegen. Die Größe des Momentes $\mathfrak{M}$ tragen wir vom Punkte O auf dieser Senkrechten nach der Seite ab, damit ein Beobachter, der auf dem abgetragenen Moment[1] steht, den Eindruck hat, daß die Kraft entgegen dem Uhrzeigersinn dreht.

[1] Der Beobachter steht so, daß das Moment von den Füßen nach dem Kopfe verläuft.

Wir vereinbaren, daß wir die Größe des Momentes $\mathfrak{M}$ jetzt immer als positiv bewerten werden. Der Punkt O heißt *Drehpunkt des Momentes.*

Das Produkt Fp ist gleich der doppelten Fläche des Dreieckes AOB (Abb. 98). Daher gewinnen wir folgenden Ausdruck für die Größe des Momentes der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O:

$$M = 2\triangle AOB.$$

Wir bemerken, daß $\mathfrak{M} = 0$ ist, wenn $p = 0$ ist, d. h., wenn die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$ durch den Drehpunkt des Momentes O verläuft.

§ 48. Das Vektorprodukt zweier Vektoren

Als unmittelbare Verallgemeinerung des von uns soeben behandelten Momentes einer Kraft bezüglich eines Punktes erscheint der Begriff des Vektorproduktes zweier Vektoren, der ein Grundbegriff der Vektor-Algebra ist. Wir wollen darüber einige Worte sagen:

Wir betrachten zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ (Abb. 99) im Raum und bilden folgende Konstruktion. Wir tragen den Vektor $\mathfrak{a}_1$ von einem beliebigen Punkte O ab; von seinem Ende aus tragen wir den Vektor $\mathfrak{a}_2$ ab. Hierauf konstruieren wir aus den aneinandergesetzten Vektoren ein Parallelogramm (in der Zeichnung ist dieses Parallelogramm schraffiert). Den Seiten des Parallelogramms, die den von uns abgetragenen Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gegenüber liegen, schreiben wir Richtungen zu, die entgegengesetzt den Richtungen der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ verlaufen. Durch die Richtungen aller vier Seiten wird der Umlaufssinn des Parallelogramms bestimmt.

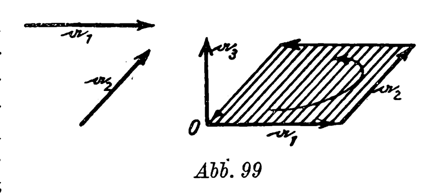


Abb. 99

Konstruieren wir jetzt einen neuen Vektor $\mathfrak{a}_3$ auf folgende Weise: Die Größe des Vektors $\mathfrak{a}_3$ sei der Fläche des soeben konstruierten Parallelogramms gleich, wir tragen diesen Vektor vom Punkte O aus senkrecht zur Ebene des Parallelogramms derart ab, so daß ein Beobachter, der auf dem Vektor $\mathfrak{a}_3$ steht, den Eindruck hat, daß die Umlaufsrichtung des Parallelogramms entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn ist (diese Regel zur Bestimmung der Richtung des Vektors $\mathfrak{a}_3$ wollen wir *Umlaufsregel des Parallelogramms* nennen).

Der Vektor $\mathfrak{a}_3$ heißt *Vektorprodukt* der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Das Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ wird mit dem Symbol $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ bezeichnet, so daß

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$$

ist.

Es ist leicht einzusehen, daß der Begriff des Vektorproduktes wirklich der verallgemeinerte Begriff des Momentes bezüglich eines Punktes ist. Es sei z. B. die im Punkte A angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ gegeben. Wir errechnen ihr Moment $\mathfrak{M}$ bezüglich des Punktes O, wie es im vorigen Paragraphen erklärt worden ist (Abb. 100). Andererseits schreiben wir dem Radiusvektor $\overline{OA}$ des Angriffspunktes A die Richtung vom

Punkte O nach dem Punkte A zu und bezeichnen diesen Radiusvektor mit dem Buchstaben $\mathfrak{r}$. Man erkennt leicht, daß das Moment $\mathfrak{M}$, das der Größe nach der Fläche des Parallelogramms aus den Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ gleich ist, sowohl der Größe als auch der Richtung nach mit dem Vektorprodukt dieser beiden Vektoren übereinstimmt, so daß

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

ist.

Mit dieser Vektorgleichung wird die Verbindung zwischen dem Moment $\mathfrak{M}$, dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und der Kraft $\mathfrak{F}$ ausgedrückt.

Zurückkehrend zum Vektorprodukt zweier beliebiger Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ stellen wir eine interessante Eigenschaft des Vektorproduktes fest:

Nehmen wir erneut die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ (Abb. 101) und stellen (wie oben erklärt) das Vektorprodukt $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1$ auf. Zu diesem Zweck tragen wir von dem willkürlichen Punkte O den Vektor $\mathfrak{a}_2$ ab und von dessen Ende den Vektor $\mathfrak{a}_1$. Aus den abgetra-

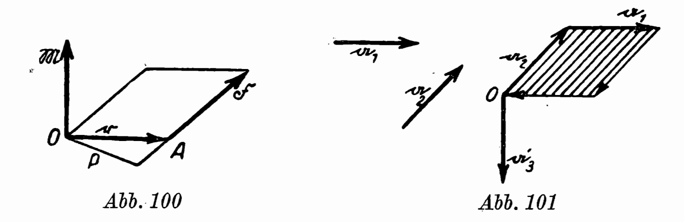


Abb. 100 *Abb. 101*

genen Vektoren konstruieren wir ein Parallelogramm. Es ist leicht einzusehen, daß wir zu dem gleichen Parallelogramm kommen, wie es in Abb. 99 konstruiert ist. Jedoch ist jetzt der Umlaufssinn entgegengesetzt zu dem in der Abb. 99 dargestellten. Indem wir das Vektorprodukt $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_3'$ bezeichnen, folgern wir, daß der Vektor $\mathfrak{a}'_3$ seinem absoluten Betrage nach gleich dem Vektor $\mathfrak{a}_3$ ist, der in Abb. 99 konstruiert ist. Wir müssen jedoch dem Vektor $\mathfrak{a}_3'$ die entgegengesetzte Richtung des Vektors $\mathfrak{a}_3$ zuschreiben. Mithin haben die Vektoren $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_3'$ die gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtungen, d. h.

$$\mathfrak{a}_3' = -\mathfrak{a}_3$$

oder anders ausgedrückt:

$$\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 .$$

Wir kommen zu einer wichtigen Eigenschaft des Vektorproduktes: *Das Vektorprodukt zweier Vektoren kehrt sein Vorzeichen bei der Vertauschung der Faktoren um.*

§ 49. Das Moment in bezug auf eine Achse

Zugleich mit dem Begriff des Momentes bezüglich eines Punktes führen wir den neuen Begriff des Momentes in bezug auf eine Achse ein.

Nehmen wir an, die Kraft $\mathfrak{F}$ und die Achse z seien gegeben (Abb. 102). Der Achse z schreiben wir eine bestimmte Richtung zu, die mit einem Pfeil bezeichnet ist. Wir legen eine Ebene P senkrecht zur z-Achse und projizieren die Kraft $\mathfrak{F}$ auf diese

Ebene. Die Projektion A_1B_1 der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Ebene P bezeichnen wir mit dem Buchstaben $\mathfrak{F}_1$. Sodann fällen wir vom Punkte O, dem Schnittpunkte der z-Achse mit der Ebene P, ein Lot auf die Wirkungslinie der Projektion $\mathfrak{F}_1$. Diese Senkrechte nennen wir den *Hebelarm der Kraft* $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse; die Länge des Hebelarmes bezeichnen wir mit dem Buchstaben p_1. (Der Hebelarm p_1 ist der kürzeste Abstand zwischen der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$ und der z-Achse.)

Das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse heißt das mit dem entsprechenden Vorzeichen versehene Produkt aus der Größe der Projektion der Kraft $\mathfrak{F}_1$ und der Länge des Hebelarmes p_1. Wenn wir das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse mit M_z bezeichnen, gilt:

$$M_z = \pm F_1 p_1 .$$

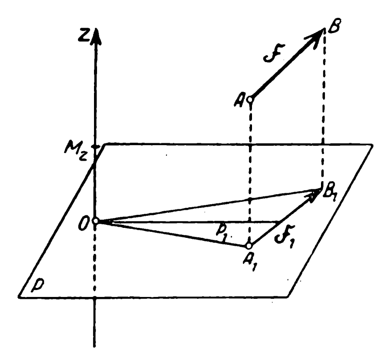


Abb. 102

Das eine oder andere Vorzeichen in dieser Formel werden wir nach folgender Regel wählen: Erscheint es einem Beobachter, der von der Seite der positiven z-Achse blickt, so, als drehe die Kraft $\mathfrak{F}$ um die z-Achse im *Gegenzeigersinn*, dann gilt in der Formel für das Moment M_z das Pluszeichen, im entgegengesetzten Fall gilt das Minuszeichen.

Das auf diese Weise bestimmte Moment M_z wollen wir vom Punkte O auf der positiven z-Achse abtragen, wenn $M_z > 0$ ist, dagegen auf der negativen z-Achse, wenn $M_z < 0$ ist.

Das Produkt $F_1 p_1$ ist gleich der doppelten Fläche des Dreiecks OA_1B_1 (Abb. 102). Folglich haben wir noch eine andere Formel für das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse:

$$M_z = \pm 2 \triangle OA_1 B_1 .$$

Es ist wichtig, hervorzuheben, daß das Moment M_z in zwei Fällen zu Null wird. Es wird $M_z = 0$: 1., wenn $F_1 = 0$, d. h., wenn die Kraft $\mathfrak{F}$ parallel zur z-Achse ist, und 2., wenn $p_1 = 0$, d. h., wenn die Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}$ die z-Achse schneidet.

§ 50. Die Beziehung zwischen dem Moment in bezug auf einen Punkt und dem Moment in bezug auf eine Achse

Gegeben sei die Kraft $\mathfrak{F}$ (Abb. 103). Wir wählen einen beliebigen Punkt O und errichten das Moment $\mathfrak{M}$ der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O. Es gilt:

$$M = 2 \triangle OAB .$$

Die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}$ ist senkrecht zur Ebene des Dreiecks OAB.

Hierauf legen wir durch den Punkt O eine beliebige Achse z (der wir eine bestimmte durch einen Pfeil angezeigte Richtung zuschreiben) und bilden das Moment M_z der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse.

Es gilt:

$$M_z = 2 \triangle OA_1B_1,$$

wobei $\overline{A_1B_1}$ die Projektion der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Ebene P ist, die durch den Punkt O geht und senkrecht zur z-Achse verläuft. Entsprechend der Abb. 103 verwenden wir für die Gleichung des Momentes M_z das Pluszeichen. Das Moment M_z tragen wir vom Punkte O auf der z-Achse ab (auf der positiven z-Achse, da $M_z > 0$ ist).

Das Dreieck OA_1B_1 stellt die Projektion des Dreiecks OAB auf die Ebene P dar. Folglich ist nach dem bekannten Satz der Geometrie die Fläche des Dreiecks OA_1B_1 gleich der Fläche des Dreiecks OAB, multipliziert mit dem Cosinus des Winkels, der von der Ebene des Dreiecks OAB und der Ebene P gebildet wird. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist jedoch gleich dem Winkel zwischen den Senkrechten auf diesen Ebenen, d. h. im gegebenen Falle gleich dem Winkel $(\mathfrak{M}, z)$ zwischen dem Moment $\mathfrak{M}$ und der z-Achse. Somit gilt:

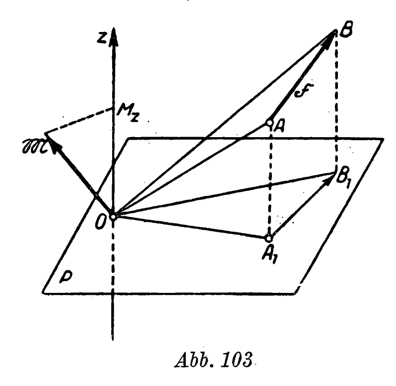


Abb. 103

$$\triangle OAB \cos(\mathfrak{M}, z) = \triangle OA_1B_1.$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit 2 multiplizieren, erhalten wir:

$$2\, OAB \cos(\mathfrak{M}, z) = 2 \triangle OA_1 B_1$$

oder

$$M \cos(\mathfrak{M}, z) = M_z,$$

d. h., *die Projektion des Momentes der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O auf die z-Achse, die durch den Punkt O verläuft, ist gleich dem Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich der z-Achse.*

Dies ist die Abhängigkeit zwischen dem Moment bezüglich eines Punktes und dem Moment bezüglich einer Achse. Diesem wichtigen Satz ist besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Wir werden ihn im weiteren mehrfach benützen müssen, nicht nur in der Statik, sondern auch in der Dynamik.

Wir entwickelten diese Abhängigkeit zwischen den Momenten $\mathfrak{M}$ und M_z unter der Voraussetzung, daß $M_z > 0$ ist. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß diese Abhängigkeit auch im Falle $M_z < 0$ gilt.

§ 51. Das Hauptmoment eines Kräftesystems in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Achse

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen und beliebig im Raume liegen (Abb. 104). Wir wählen einen willkürlichen Punkt O und stellen die Momente der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O auf, die wir mit $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ bezeichnen.

Die Summe der Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ heißt das Hauptmoment des Systems der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich des Punktes O. Wenn wir dieses Hauptmoment mit dem Buchstaben $\mathfrak{M}$ bezeichnen, gilt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n.$$

Wiederum sind die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gegeben, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen und im Raume liegen (Abb. 105). Wir betrachten eine willkürliche z-Achse (der wir die in der Abbildung mit einem Pfeil angezeigte Richtung zuschreiben) und stellen die Momente der gegebenen Kräfte bezüglich der z-Achse auf. Wir bezeichnen diese Momente mit $M_{1z}, M_{2z}, \ldots, M_{nz}$.

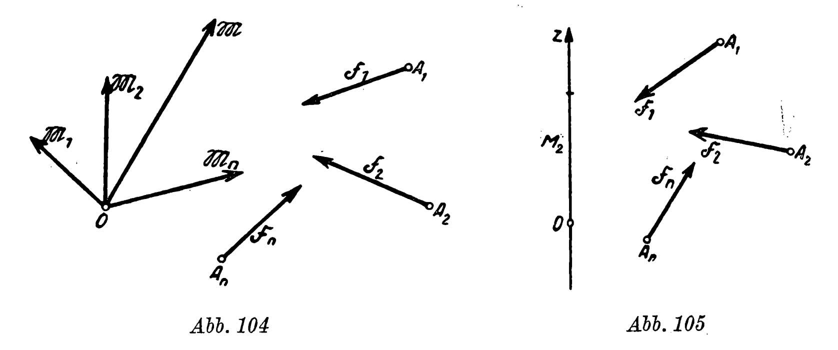


Abb. 104 *Abb. 105*

Die Summe der Momente $M_{1z}, M_{2z}, \ldots, M_{nz}$ heißt Hauptmoment des Systems der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich der z-Achse. Bezeichnen wir dieses Hauptmoment mit dem Buchstaben M_z, so gilt:

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz}.$$

Das Hauptmoment M_z als Summe der positiven und negativen Summanden kann sowohl positiv als auch negativ sein. Wir vereinbaren, das Hauptmoment M_z auf der positiven z-Achse von dem willkürlichen Punkte O, der auf dieser Achse liegt, abzutragen, wenn $M_z > 0$ ist, und auf der negativen Achse, wenn $M_z < 0$ ist.

§ 52. Die Beziehung zwischen den Hauptmomenten eines Kräftesystems in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Achse

Gegeben sei das System der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ (Abb. 106). Wir betrachten einen beliebigen Punkt O und stellen die Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O und ebenso ihr Hauptmoment $\mathfrak{M}$ bezüglich dieses Punktes auf.

Dann legen wir durch den Punkt O eine willkürliche Achse z (der wir den in der Zeichnung mit einem Pfeil angezeigten Verlauf zuschreiben) und projizieren sowohl die Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ als auch das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ auf diese Achse. Da

das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ gleich der Summe der Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ ist, die Projektion der Summe aber gleich der Summe der Projektionen der Komponenten, erhalten wir:

$$M \cos(\mathfrak{M}, z) = \sum M_i \cos(\mathfrak{M}_i, z).$$

Andrerseits gilt auf Grund der uns bereits bekannten Abhängigkeit zwischen den Momenten bezüglich eines Punktes und bezüglich einer Achse:

$$M_i \cos(\mathfrak{M}_i, z) = M_{iz},$$

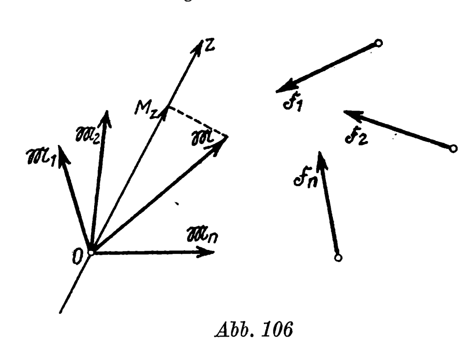


Abb. 106

wobei $M_{1z}, M_{2z}, \ldots, M_{nz}$ die Momente der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich der z-Achse sind. Folglich erhalten wir:

$$M \cos(\mathfrak{M}, z) = \sum M_{iz}.$$

Die Summe, die im rechten Teil dieser Gleichung steht, ist jedoch gleich dem Hauptmoment M_z des gegebenen Kräftesystems bezüglich der z-Achse. Somit erhalten wir endgültig:

$$M \cos(\mathfrak{M}, z) = M_z,$$

d. h., *die Projektion des Hauptmomentes des Kräftesystems bezüglich irgendeines Punktes O auf eine Achse, die durch den Punkt O verläuft, ist gleich dem Hauptmoment des Kräftesystems bezüglich dieser Achse.*

Folglich besteht zwischen den Hauptmomenten bezüglich eines Punktes und bezüglich einer Achse die gleiche Abhängigkeit, wie zwischen den Momenten einer einzelnen Kraft bezüglich eines Punktes und bezüglich einer Achse.

KAPITEL X

DIE ADDITION VON KRÄFTEN, DIE BELIEBIG IM RAUM ANGEORDNET SIND

§ 53. Die Reduktion einer Kraft auf einen gegebenen Punkt

Wir wenden uns jetzt der Addition von Kräften zu, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen und ganz beliebig im Raume liegen. Zur Lösung dieser Frage benutzen wir dieselbe Methode der Reduktion aller Kräfte auf einen Punkt, die wir bereits in Kapitel IV bei der Addition der in einer Ebene liegenden Kräfte benutzten.

Wir erinnern vor allem daran, auf welche Weise die gegebene Kraft auf den gegebenen Punkt reduziert wird.

Gegeben sei die an dem Punkte A angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ (Abb. 107). Wählen wir einen beliebigen Punkt O und legen wir an ihn zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte, von denen die eine gleich der Kraft $\mathfrak{F}$ (diese Kraft ist in Abb. 107 mit zwei Querstrichen bezeichnet), die andere hingegen der Größe nach der Kraft $\mathfrak{F}$ gleich ist, aber nach der entgegengesetzten Seite verläuft (wir bezeichnen sie mit $-\mathfrak{F}$).

Die gegebene Kraft $\mathfrak{F}$ ist durch die Kraft $\mathfrak{F}$ ersetzt worden, die an dem Punkte O angreift (und in der Abbildung mit zwei Querstrichen bezeichnet ist) und durch das Kräftepaar $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$, das wir angegliedertes Kräftepaar nennen.

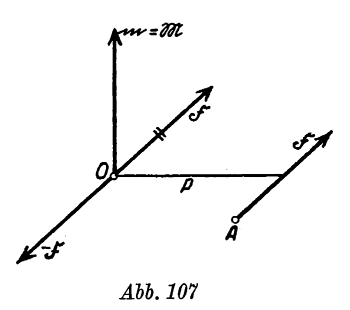


Abb. 107

Die Vertauschung der gegebenen, an dem Punkte A angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkte O angreift, und mit dem angegliederten Kräftepaar $\mathfrak{F}, -\mathfrak{F}$ nennen wir Reduktion der gegebenen Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Punkt O.

Wir haben das Moment $\mathfrak{m}$ des angegliederten Kräftepaares zu ermitteln. Wenn wir ein Lot vom Punkte O auf die Wirkungslinie der gegebenen Kraft $\mathfrak{F}$ fällen, erhalten wir den Hebelarm p des Kräftepaares. Die Größe m des Momentes des Kräftepaares ist gleich

$$m = Fp.$$

Das Moment $\mathfrak{m}$ verläuft senkrecht zur Ebene, die durch den Punkt O und durch die gegebene Kraft $\mathfrak{F}$ geht, und zwar derart, daß ein Beobachter, der sich auf dem Moment befindet, den Eindruck hat, das Kräftepaar drehe eine Ebene im Gegenzeigersinn. Da das Moment des Kräftepaares nach einem beliebigen Punkte des Raumes verlegt werden kann, tragen wir das Moment $\mathfrak{m}$ in der angegebenen Richtung vom Punkte O ab.

Wir bilden jetzt das Moment $\mathfrak{M}$ der gegebenen Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O. Die Größe M des Momentes ist gleich

$$M = Fp = m,$$

die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}$ fällt mit der Richtung des Momentes des Kräftepaares $\mathfrak{m}$ zusammen, d. h., die Momente $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ sind einander gleich:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M}.$$

Somit ist das Moment des angegliederten Kräftepaares gleich dem Moment der gegebenen Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes O.

§ 54. Die Reduktion eines Systems von Kräften, die sich beliebig im Raum befinden, auf eine Kraft und ein Kräftepaar

Wir wenden uns jetzt der Addition der Kräfte zu, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen und beliebig im Raume liegen.

Gegeben seien die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eines beliebigen starren Körpers angreifen und beliebig im Raume verlaufen (Abb. 108).

Wir betrachten einen beliebigen Punkt O, den wir Reduktionszentrum nennen wollen, und reduzieren alle gegebenen Kräfte auf diesen Punkt.

Als Ergebnis dieser Reduktion erhalten wir die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte O angreifen und in der Abbildung mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, und die angegliederten Kräftepaare $\mathfrak{F}_1, -\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2, -\mathfrak{F}_2; \ldots; \mathfrak{F}_n, -\mathfrak{F}_n$. Wenn wir die Momente dieser Kräftepaare mit den Buchstaben $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ bezeichnen, ergibt sich übereinstimmend mit dem oben Vermerkten:

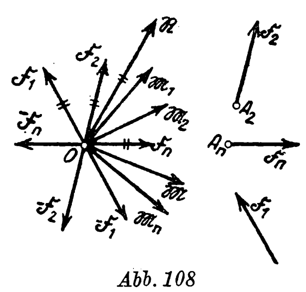


Abb. 108

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{M}_2, \quad \cdots, \quad \mathfrak{m}_n = \mathfrak{M}_n,$$

wobei $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ die Momente der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich des Punktes O sind.

Addieren wir die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte O angreifen und mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, so erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, die an demselben Punkte O angreift und gleich der Summe der Komponenten der Kräfte ist:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n.$$

In Abb. 108 ist diese Kraft $\mathfrak{R}$ ebenfalls mit zwei Querstrichen bezeichnet. Addieren wir jedoch die angegliederten Kräftepaare, so erhalten wir ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{m}$ gleich der Summe der Momente der Komponentenkräftepaare ist, d. h.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \cdots + \mathfrak{m}_n = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n.$$

Die Summe der Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ ist jedoch gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich des Punktes O. Folglich ist

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M},$$

d. h., das Moment des resultierenden Kräftepaares ist gleich dem Hauptmoment der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O.

Wir bemerken, daß die Summe $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte auch ihr *Hauptvektor* heißt. Indem wir diesen Ausdruck einführen, können wir das erhaltene Ergebnis auf folgende Weise formulieren:

Die beliebig im Raume liegenden Kräfte können auf eine Kraft reduziert werden, die ihrem Hauptvektor gleich ist und an einem beliebigen Punkte O angreift, und auf ein

Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Hauptmoment der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O ist.

Reduzieren wir das gegebene Kräftesystem nach der gezeigten Methode auf eine Kraft und ein Kräftepaar, so begegnen wir einem der folgenden vier Fälle, die wir nacheinander in den Paragraphen 55 bis 58 betrachten werden.

§ 55. Kräfte im Gleichgewicht

Wir setzen voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ gleich Null sind.

Da $\mathfrak{R} = 0$ ist, heben sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte O angreifen und in Abb. 108 mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, gegenseitig auf, und wegen $\mathfrak{M} = 0$ heben sich die angegliederten Kräftepaare ebenfalls gegenseitig auf. Folglich befinden sich im betrachteten Falle die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht.

Somit heben sich die Kräfte, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen und beliebig im Raum liegen, gegenseitig auf, wenn sie zwei Bedingungen erfüllen: Ihr Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ (bezüglich des willkürlichen Punktes O) müssen gleich Null sein:

$$\mathfrak{R} = 0, \qquad \mathfrak{M} = 0.$$

Das sind die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte, die beliebig im Raume liegen.

§ 56. Kräfte, die auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden können

Wir setzen voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich Null, das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ jedoch nicht gleich Null ist.

Da $\mathfrak{R} = 0$ ist, heben sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an dem Punkte O angreifen und mit zwei Querstrichen bezeichnet sind, gegenseitig auf. Es verbleibt ein Kräftepaar, das durch Addition der angegliederten Kräftepaare erhalten wird. Folglich werden im gegenwärtigen Fall die gegebenen Kräfte auf ein Kräftepaar zurückgeführt.

Das Moment $\mathfrak{m}$ dieses Kräftepaares ist gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M}.$$

§ 57. Kräfte, die auf eine Resultierende reduziert werden können. Das Theorem vom Moment der Resultierenden

Wir setzen jetzt voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ nicht gleich Null und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ entweder gleich Null ist oder senkrecht zum Hauptvektor steht.

Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall die gegebenen Kräfte auf *eine Resultierende* reduziert werden können.

Betrachten wir getrennt die Fälle $\mathfrak{M} = 0$ und $\mathfrak{M} \neq 0$.

Wir setzen zu Anfang voraus, daß das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ gleich Null ist. In diesem Fall heben sich die angegliederten Kräftepaare gegenseitig auf. Es verbleibt eine Kraft $\mathfrak{R}$, die an dem Punkte O angreift und sich aus der Addition der in Abb. 108 mit zwei Querstrichen bezeichneten Kräfte ergeben hat. Also werden die uns gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf eine Resultierende zurückgeführt, die ihrem Hauptvektor gleich ist und an dem Reduktionszentrum angreift.

Wir setzen jetzt voraus, daß das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ nicht gleich Null sei, sondern senkrecht zum Hauptvektor $\mathfrak{R}$ stehe.

Gegeben seien die Kraft $\mathfrak{R}$, die an dem Punkte O angreift (und mit zwei Querstrichen bezeichnet ist), und das Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}$, senkrecht zu $\mathfrak{R}$ (Abb. 109). Wir verfügen über dieses Kräftepaar in folgender Weise: Nehmen wir an, daß die Kräfte, die ein Kräftepaar bilden, der Größe nach gleich R sind, dann ist der Hebelarm dieses Kräftepaares gegeben zu $\frac{M}{R}$. Wir ordnen das Kräftepaar so an, daß eine Kraft des Paares (in Abb. 109 ist sie mit $-\mathfrak{R}$ bezeichnet) am Punkte O angreift und nach der entgegengesetzten Richtung der Kraft $\mathfrak{R}$ verläuft, die andere Kraft des Kräftepaares ist der Kraft $\mathfrak{R}$ gleich und greift an dem Punkte N an. Der Punkt N liegt auf der Senkrechten zu der durch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ verlaufenden Ebene im Abstand $M : R$ vom Punkte O.

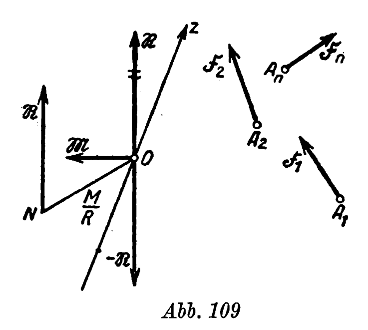


Abb. 109

Am Anfang dieses Buches (§ 8) wurde festgestellt, daß nicht jedes Kräftesystem eine Resultierende besitzt. Wir finden jetzt, daß die Bedingung, unter der das Kräftesystem durch eine Resultierende ersetzt werden kann; sie besteht darin, daß *der Hauptvektor des gegebenen Kräftesystems nicht gleich Null ist, während das Hauptmoment (bezüglich irgendeines Punktes) entweder gleich Null ist oder senkrecht zum Hauptvektor gerichtet sein muß.*

Wir bemerken hier den Unterschied zwischen den Begriffen der Resultierenden und des Hauptvektors. Die Resultierende (sofern sie vorhanden ist) ersetzt gänzlich das gegebene Kräftesystem und hat eine bestimmte Wirkungslinie im Körper. Der Hauptvektor ersetzt das gegebene Kräftesystem nur in Verbindung mit dem entsprechenden angegliederten Kräftepaar und kann an einem beliebigen Punkte des Körpers errichtet werden.

Wir werden jetzt zeigen, daß, wenn die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf eine Resultierende reduziert werden, das Moment der Resultierenden bezüglich irgendeines beliebigen Punktes gleich der Summe der Momente der einzelnen beteiligten Kräfte bezüglich desselben Punktes ist, während das Moment der Resultierenden bezüglich irgendeiner beliebigen Achse gleich der Summe der Momente der Komponenten bezüglich derselben Achse ist.

Kehren wir zur Abb. 109 zurück. Wir stellen das Moment der Resultierenden $\mathfrak{R}$, die an dem Punkte N angreift, bezüglich des Reduktionszentrums O auf, bezeichnen es mit $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ und erhalten:

$$M(\mathfrak{R}) = R \cdot \frac{M}{R} = M .$$

Bestimmen wir nun den Verlauf des Momentes $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ nach der bekannten Regel, so sehen wir, daß er mit dem Verlauf des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ zusammenfällt. Folglich ist das Moment $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{M}.$$

Andererseits ist das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ bezüglich des Punktes O gleich der Summe der Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich desselben Punktes:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n .$$

Folglich ist

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n ,$$

d. h., das Moment der Resultierenden bezüglich des Reduktionszentrums ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte des Systems bezüglich desselben Punktes. Da das Reduktionszentrum ein völlig willkürlicher Punkt ist, ergibt sich hieraus der erste Teil des zu beweisenden Theorems.

Legen wir jetzt durch das Reduktionszentrum O eine beliebige Achse z (Abb. 109) und ermitteln das Moment der Resultierenden $\mathfrak{R}$ (die an dem Punkte N angreift) bezüglich dieser z-Achse. Wir bezeichnen dieses Moment mit $M_z(\mathfrak{R})$.

Nach dem bekannten Satz ist das Moment $M_z(\mathfrak{R})$ gleich der Projektion des Momentes $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ der Resultierenden $\mathfrak{R}$ bezüglich des Punktes O auf die z-Achse. Da aber

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{M} ,$$

ist folglich das Moment $M_z(\mathfrak{R})$ gleich der Projektion des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf die z-Achse:

$$M_z(\mathfrak{R}) = M \cos(\mathfrak{M}, z).$$

Andererseits ist jedoch die Projektion des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf die z-Achse gleich dem Hauptmoment M_z der gegebenen Kräfte bezüglich der z-Achse:

$$M \cos(\mathfrak{M}, z) = M_z ,$$

und folglich

$$M_z(\mathfrak{R}) = M_z .$$

Wenn wir uns daran erinnern, daß das Hauptmoment M_z gleich der Summe der Momente $M_{1z}, M_{2z}, \ldots, M_{nz}$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich der z-Achse ist:

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz},$$

erhalten wir:

$$M_z(\mathfrak{R}) = M_{1z} + M_{2z} + \cdots M_{nz},$$

d. h., das Moment der Resultierenden bezüglich der z-Achse ist gleich der Summe der Momente der Komponenten bezüglich derselben Achse.

Behalten wir im Auge, daß die z-Achse eine völlig willkürliche Achse ist, so erhalten wir den zweiten Teil des zu beweisenden Theorems.

§ 58. Kräfte, die auf eine Kraftschraube zurückgeführt werden können. Die Zentralachse

Wir setzen voraus, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ nicht gleich Null sind und letzteres nicht senkrecht zum Hauptvektor steht.

Gegeben seien die Kraft $\mathfrak{R}$, die an dem Punkte O angreift (mit zwei Querstrichen bezeichnet), und das Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}$ (Abb. 110). Wir zerlegen dieses Kräftepaar in zwei Kräftepaare, so daß die Ebene des einen Kräftepaares senkrecht zum Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und die Ebene des anderen parallel zu ihm liegt. Zu diesem Zweck zerlegen wir (gemäß der Regel vom Parallelogramm der Momente) das Moment $\mathfrak{M}$ in die zwei Momente $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_1$, von denen eines auf der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{R}$ und das andere senkrecht dazu verläuft. Die Größe dieser Komponenten sind:

$$M_0 = M \cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}), \qquad M_1 = M \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}).$$

Bilden wir ein Kräftepaar aus den Kräften R und $-R$, dessen Moment gleich $\mathfrak{M}_1$ ist, dann muß der Abstand zwischen den Kräften dieses Kräftepaares gleich $M_1 : R$ sein. Hierauf verlegen wir dieses Kräftepaar so, daß eine Kraft an dem Punkte O angreift und entgegengesetzt zur Kraft $\mathfrak{R}$ verläuft. Die andere Kraft des Paares greift an dem Punkte N an, der auf der im Punkte O durch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ errichteten Senkrechten zur Ebene im Abstand $M_1 : R$ liegt. Hierbei muß die Senkrechte vom Punkte O aus derart errichtet werden, daß ein Beobachter, der sich auf dem Moment $\mathfrak{M}_1$ befindet, den Eindruck hat, das Kräftepaar drehte die eigene Ebene im Gegenzeigersinn. Die beiden Kräfte $\mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{R}$, die an dem Punkte O angreifen, heben sich gegenseitig auf. Es bleiben noch die Kraft $\mathfrak{R}$, die an dem Punkte N angreift, und das Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}_0$, dessen Ebene senkrecht zum Hauptvektor $\mathfrak{R}$ liegt, zu betrachten. Das Moment dieses Kräftepaares $\mathfrak{M}_0$ verlegen wir nach dem Punkte N (ohne seine Richtung zu ändern).

Somit ist N der Punkt, durch den, als Reduktionszentrum gewählt, die Kraft verläuft, die dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich ist, und das Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{M}_0$ parallel zur Kraft $\mathfrak{R}$ ist, und dessen Ebene folglich senkrecht zur Kraft $\mathfrak{R}$ steht. Das System der Kraft und des Kräftepaares, das auf der senkrecht zur Kraft verlaufenden

Ebene liegt, heißt *Kraftschraube.* Offensichtlich besitzt nicht nur der Punkt N diese dargelegte Eigenschaft, sondern alle Punkte der Geraden NP, die durch N und parallel zum Hauptvektor verläuft, da man den Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{R}$ nach einem beliebigen Punkte ihrer Wirkungslinie verlegen kann.

Verlegen wir jedoch den Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{R}$ nach einem beliebigen Punkte O, der nicht auf der Geraden NP liegt, so erscheint, übereinstimmend mit der Regel der Kräftereduktion auf einen Punkt (§ 53), ein angegliedertes Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}_1$, das gleich dem Moment der an dem Punkte N angreifenden Kraft $\mathfrak{R}$ bezüglich des Zentrums O ist. Das Moment $\mathfrak{M}_1$ steht offensichtlich senkrecht zu $\mathfrak{R}$. Wenn wir die Momente $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_1$ addieren, erhalten wir das Hauptmoment des gegebenen Kräftesystems bezüglich des Punktes O:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1. \qquad (1)$$

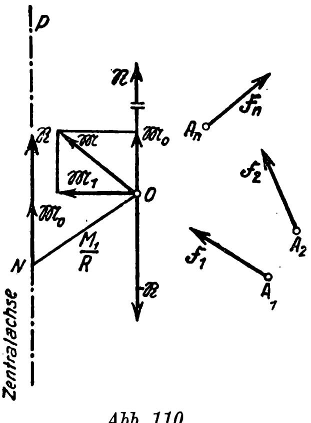


Abb. 110

Folglich wird für ein beliebiges Reduktionszentrum, das nicht auf der Geraden NP liegt, das Hauptmoment, das außer dem parallelen Summanden $\mathfrak{M}_0$ auch den Summanden $\mathfrak{M}_1$ besitzt, der senkrecht zum Hauptvektor steht, nicht parallel dem Hauptvektor sein. Daher ist die Gerade NP der geometrische Ort der Reduktionszentren, für den das Hauptmoment parallel dem Hauptvektor ist. Diese Gerade heißt *Zentralachse* des gegebenen Kräftesystems.

Es ist offensichtlich, daß jedem Kräftesystem, für das $\mathfrak{R} \neq 0$ ist, eine völlig bestimmte Zentralachse entspricht. Der Hauptvektor des Kräftesystems hängt gemäß seiner Definition nicht von der Lage des Reduktionszentrums ab. Die Komponente $\mathfrak{M}_0$ des Hauptmomentes in Richtung des Hauptvektors hängt ebenfalls nicht von der Wahl des Reduktionszentrums ab. Die Vektorgleichung (1) zeigt tatsächlich, daß beim Übergang auf ein beliebiges Reduktionszentrum das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ durch Addition des Momentes $\mathfrak{M}_1$, das senkrecht zum Hauptvektor steht, und des Momentes $\mathfrak{M}_0$ gewonnen wird. Folglich bleibt die Komponente des Hauptmomentes, die parallel zum Hauptvektor steht, stets die gleiche bei einer beliebigen Wahl des Reduktionszentrums. Somit kann jedes beliebige Kräftesystem, für welches $\mathfrak{R} \neq 0$ ist, auf nur eine Kraftschraube nach einer einzigen Methode reduziert werden. Diese *Kraftschraube besteht 1. aus einer Kraft, die dem Hauptvektor des gegebenen Kräftesystems gleich ist und deren Wirkungslinie die Zentralachse des Systems ist, und 2. einem Kräftepaar, dessen Moment gleich der Komponente des Hauptmomentes und parallel zum Hauptvektor ist.*

Wir stellen fest, daß man das in § 57 erzielte Ergebnis als Sonderfall dieses allgemeinen Ergebnisses ansehen kann. In diesem Fall ist $\mathfrak{M}_0 = 0$, und die Kraftschraube wird nur auf die Kraft $\mathfrak{R}$ reduziert. Die Zentralachse erscheint in diesem Fall als Wirkungslinie der Resultierenden. Im Falle des § 56 fehlt die Kraft $\mathfrak{R}$, und die Kraftschraube wird nur auf ein Kräftepaar zurückgeführt. Als Zentralachse kann eine

beliebige Gerade angenommen werden, die parallel zum Moment des Kräftepaares verläuft. Im Fall des § 55 ist bei der Kraftschraube weder Kraft noch Kräftepaar vorhanden.

Kehren wir zur Abb. 110 zurück. Wenn wir den Abstand des Reduktionszentrums O von der Zentralachse mit r bezeichnen, erhalten wir:

$$M_1 = r R$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} M &= \sqrt{M_0^2 + M_1^2} = \sqrt{M_0^2 + r^2 R^2} \\ \cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) &= \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 + r^2 R^2}} \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

wobei M die Größe des Hauptmomentes bezüglich eines beliebigen Reduktionszentrums O ist und M_0 die Projektion des Hauptmomentes auf den Hauptvektor darstellt, die übereinstimmend mit dem Vorhergehenden einen konstanten Wert hat. Aus den Formeln (2) folgt: 1. Für alle Reduktionszentren, die sich im Abstand r von der Zentralachse befinden (d. h. auf der Fläche eines Kreiszylinders liegen, dessen Achse die Zentralachse des gegebenen Kräftesystems und dessen Radius gleich r ist), hat das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ eine feste Größe und bildet einen festen Winkel mit dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$. Durch diesen Umstand erklärt sich der Begriff „Zentralachse". 2. Die Größe des Hauptmomentes wächst mit dem Anwachsen von r und ist am kleinsten für $r = 0$; dann gilt

$$M = |M_0|.$$

Somit ist die Größe des Hauptmomentes für die Punkte der Zentralachse am kleinsten und gleich der absoluten Größe der Projektion des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf den Hauptvektor $\mathfrak{R}$.

§ 59. Das Vektorprodukt zweier geometrischer Summen. Die Komponenten eines Vektorproduktes aus zwei Vektoren

Wir wenden das Theorem vom Moment der Resultierenden an, um eine weitere Tatsache der Vektoralgebra folgern zu können.

Nehmen wir an, es seien zwei Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gegeben, die an einem Punkte A angreifen (Abb. 111). Wir ermitteln die Resultierende $\mathfrak{R}$ dieser Kräfte; sie greift an demselben Punkte A an und ist gleich der Summe der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2.$$

Bezeichnen wir die Momente der Kräfte $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bezüglich irgendeines Punktes O mit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, so gilt nach diesem Theorem

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2.$$

Andererseits haben wir in § 48 gesehen, daß das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des gegebenen Punktes als Vektorprodukt $\mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$ dargestellt werden kann, wobei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor von einem gegebenen Punkt nach dem Angriffspunkt der Kraft ist. Infolgedessen gilt, wenn wir den Radiusvektor OA mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{F}_2.$$

Unter Verwendung der obigen Gleichungen ermitteln wir

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{R} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_2,$$

oder

$$\mathfrak{r} \times (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_2.$$

Diese Gleichung hat rein geometrischen Charakter. Sie ist nicht an die physikalische Natur der Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gebunden. Deshalb kann die gefundene Identität auf beliebige Vektoren ausgedehnt werden. Betrachten wir drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und wenden wir auf sie die soeben erhaltene Formel an, so gilt:

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}. \qquad (1)$$

Abb. 111

Diese Formel kann noch verallgemeinert werden. Wir wählen die vier Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Indem wir die erhaltene Formel auf das Vektorprodukt $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$ anwenden, gilt:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{d}.$$

Ferner gilt, wenn wir uns erinnern, daß das Vektorprodukt bei der Vertauschung der Reihenfolge der Vektoren das Vorzeichen ändert:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = -\mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Wenden wir Formel (1) abermals auf das Vektorprodukt an, das auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, so erhalten wir

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = -\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}.$$

Entsprechend ermitteln wir:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{d}.$$

Endgültig erhalten wir:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{d}.$$

Wir erhielten die Formel für das Vektorprodukt zweier Vektorensummen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} + \mathfrak{d}$. Es wäre leicht, diese Formel auf Summen auszudehnen, die aus einer beliebigen Anzahl von Summanden bestehen. Somit muß man, um zwei Summen vektoriell zu multiplizieren, jeden Summanden der zweiten Summe paarweise multiplizieren und

die Ergebnisse addieren. Wie ersichtlich, bleibt die Regel der Multiplikation von Polynomen, die aus der elementaren Algebra bekannt ist, auch in der vektoriellen Algebra richtig.

Wir stellen jetzt die Formeln für die Projektion eines Vektorproduktes auf die Koordinatenachsen auf.

Betrachten wir zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und ermitteln ihr Vektorprodukt:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Hierauf wählen wir die zueinander senkrechten Achsen x, y und z und bezeichnen die Projektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ auf diese Achsen entsprechend mit a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z; c_x, c_y, c_z. Es sollen die Projektionen des Vektors $\mathfrak{c}$ durch die Projektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ausgedrückt werden.

Führen wir die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein, die in Richtung der Achsen x, y und z verlaufen, so gilt:

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k}.$$

Setzen wir diese Gleichungen in das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ein und benutzen die Regel der Vektorenmultiplikation zweier Summen, so erhalten wir:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = a_x b_x (\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) + a_y b_x (\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) + a_z b_x (\mathfrak{k} \times \mathfrak{i}) + a_x b_y (\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) + a_y b_y (\mathfrak{j} \times \mathfrak{j})$$
$$+ a_z b_y (\mathfrak{k} \times \mathfrak{j}) + a_x b_z (\mathfrak{i} \times \mathfrak{k}) + a_y b_z (\mathfrak{j} \times \mathfrak{k}) + a_z b_z (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}).$$

Es ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = 0,$$

$$\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = -(\mathfrak{k} \times \mathfrak{j}) = \mathfrak{i}, \qquad \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = -(\mathfrak{i} \times \mathfrak{k}) = \mathfrak{j},$$

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = -(\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) = \mathfrak{k}.$$

Auf Grund dieser Gleichungen gilt:

$$\mathfrak{c} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathfrak{k}.$$

Dies ist die Zerlegungsformel des Vektorproduktes $\mathfrak{c}$ in Komponenten auf den Achsen x, y, z. Stellen wir diese Formel der Gleichung

$$\mathfrak{c} = c_x \mathfrak{i} + c_y \mathfrak{j} + c_z \mathfrak{k}$$

gegenüber, so erhalten wir die gesuchten Formeln für die Projektionen des Vektorproduktes:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Im weiteren werden wir diese Gleichungen wiederholt benutzen.

§ 60. Die Momente in bezug auf die Koordinatenachsen, ausgedrückt durch die Kraftkomponenten auf denselben Achsen

Wir benutzen die in § 59 erhaltenen Formeln für die Projektion eines Vektorprodukts zweier Vektoren auf die Koordinatenachsen für die Gewinnung von oft angewandten Darstellungen der Momente bezüglich der Koordinatenachsen durch die Kraftkomponenten auf denselben Achsen.

Gegeben sei die Kraft $\mathfrak{F}$, die an dem Punkte A angreift (Abb. 112). Wir wählen drei zueinander senkrechte Koordinatenachsen x, y und z, in deren Richtung die Einheitsvektoren verlaufen. Den Radiusvektor des Punktes A in bezug auf den Koordinatenursprung bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}$. Wie in § 48 gezeigt wurde, wird das Moment $\mathfrak{M}$ der Kraft $\mathfrak{F}$ bezüglich des Koordinatenursprungs durch die Formel

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

ausgedrückt.

Wir zerlegen die Vektoren $\mathfrak{M}, \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen:

$$\mathfrak{M} = M_x \mathfrak{i} + M_y \mathfrak{j} + M_z \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{F} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}.$$

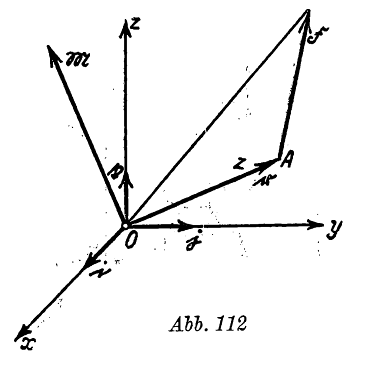


Abb. 112

Wenden wir die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen auf die Komponenten des Vektorprodukts in Richtung der Koordinatenachsen an, so erhalten wir:

$$M_x = yZ - zY,$$

$$M_y = zX - xZ,$$

$$M_z = xY - yX.$$

Hierin bezeichnen M_x, M_y, M_z die Komponenten des Moments $\mathfrak{M}$ bezüglich des Koordinatenursprungs in Richtung der Koordinatenachsen, die nach § 50 gleich den Momenten der Kraft $\mathfrak{F}$ in bezug auf die entsprechenden Achsen sind.

§ 61. Die Berechnung des Hauptvektors und des Hauptmoments nach der Projektionsmethode

Wir gehen jetzt zur Aufstellung von Gleichungen für die Berechnung des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ nach der Projektionsmethode über.

Gegeben sind die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen und beliebig im Raum liegen (Abb. 113). Wir wählen ein beliebiges Reduktionszentrum O und reduzieren die gegebenen Kräfte, wie oben erklärt, auf eine Kraft, die an dem Punkte O angreift und gleich dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ ist, und ein

Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ bezüglich des Punktes O ist. Wir wissen, daß

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n,$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n,$$

wobei $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ die Momente der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes O sind.

Für die Berechnung des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ benutzen wir die Projektionsmethode.

Wir legen durch das Reduktionszentrum O drei senkrecht zueinander stehende Achsen x, y, z und projizieren, wie in Abb. 113 gezeigt, den Hauptvektor $\mathfrak{R}$ auf diese Achsen. Wir bezeichnen diese Projektionen des Hauptvektors auf die Achsen x, y, z mit den Buchstaben X, Y, Z. Da der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich der Summe der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist, gilt nach dem Satz von der Projektion der Vektorensumme:

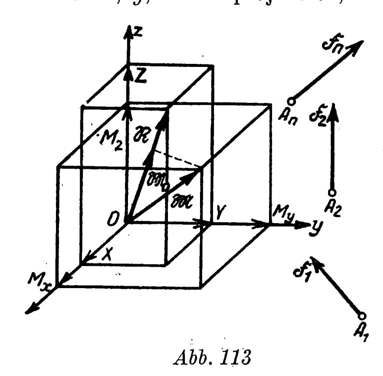


Abb. 113

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n,$$

wobei $X_1, X_2, \ldots, Z_n$ die Komponenten der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf die Achsen x, y und z sind.

Nachdem wir die Komponenten des Hauptvektors nach den soeben aufgeschriebenen Gleichungen berechnet haben, finden wir die Größe des Hauptvektors (als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds, das aus den Komponenten X, Y und Z konstruiert ist) nach der Gleichung:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ferner gilt:

$$X = R\cos(\mathfrak{R}, x), \qquad Y = R\cos(\mathfrak{R}, y),$$

$$Z = R\cos(\mathfrak{R}, z),$$

woraus folgt

$$\cos(\mathfrak{R}, x) = \frac{X}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}, y) = \frac{Y}{R},$$

$$\cos(\mathfrak{R}, z) = \frac{Z}{R}.$$

Mit diesen Gleichungen bestimmt man die Richtung des Hauptvektors.

Gehen wir nun zur Berechnung des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ über. Wir projizieren es auf die Achsen x, y und z. Zu diesem Zweck konstruieren wir ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel zu den Achsen x, y und z sind und in dem das

Hauptmoment $\mathfrak{M}$ als Diagonale erscheint. Die Kanten dieses rechtwinkligen Parallelepipeds sind die Komponenten des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf den Achsen x, y und z.

Eingedenk der Abhängigkeit zwischen dem Hauptmoment bezüglich eines Punktes und dem Hauptmoment bezüglich einer Achse, folgern wir, daß die soeben konstruierten Komponenten des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf den Achsen x, y und z gleich den Hauptmomenten M_x, M_y, M_z bezüglich der Achsen x, y und z sind. Diese Hauptmomente M_x, M_y, M_z werden nach den Gleichungen

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + \cdots + M_{nx},$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + \cdots + M_{ny},$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz}$$

berechnet, wobei M_{1x}, M_{2x}, ..., M_{nz} die Momente der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich der Achsen x, y und z sind.

Hierauf ermitteln wir die Größe des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ (als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds) nach der Gleichung

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Ferner gilt:

$$M_x = M \cos(\mathfrak{M}, x), \qquad M_y = M \cos(\mathfrak{M}, y), \qquad M_z = M \cos(\mathfrak{M}, z),$$

woraus folgt:

$$\cos(\mathfrak{M}, x) = \frac{M_x}{M}, \qquad \cos(\mathfrak{M}, y) = \frac{M_y}{M}, \qquad \cos(\mathfrak{M}, z) = \frac{M_z}{M}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen bestimmt man die Richtung des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$.

Wir bemerken, daß die Momente M_{1x}, M_{2x}, ..., M_{nx} der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezüglich der Achsen x, y, z entweder durch Bestimmung des Momentes bezüglich der Achsen oder mit Hilfe der in § 60 aufgestellten Gleichungen berechnet werden können. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes A_i (d. h. des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}_i$) bezüglich der Achsen x, y und z mit x_i, y_i, z_i und die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf denselben Achsen mit X_i, Y_i, Z_i, so gilt:

$$M_{ix} = y_i Z_i - z_i Y_i,$$

$$M_{iy} = z_i X_i - x_i Z_i,$$

$$M_{iz} = x_i Y_i - y_i X_i.$$

Folglich können die Hauptmomente M_x, M_y, M_z nach den Gleichungen:

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i),$$

$$M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i),$$

$$M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$$

berechnet werden, wobei die Summierung über alle i-Werte von 1 bis n läuft.

Zum Abschluß berechnen wir noch die Größe M_0 des geringsten Hauptmomentes des gegebenen Kräftesystems.

Am Ende des § 58 war erwähnt worden, daß die Größe des kleinsten Hauptmomentes $\mathfrak{M}_0$ gleich der Projektion des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf den Hauptvektor $\mathfrak{R}$ ist. Projizieren wir das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ auf den Hauptvektor (Abb. 113), so erhalten wir:

$$M_0 = M \cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}).$$

Wir wenden für $\cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R})$ die aus der analytischen Geometrie bekannte Formel für den Cosinus des Winkels zwischen zwei Richtungen an und erhalten:

$$\cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) = \cos(\mathfrak{M}, x)\cos(\mathfrak{R}, x) + \cos(\mathfrak{M}, y)\cos(\mathfrak{R}, y) + \cos(\mathfrak{M}, z)\cos(\mathfrak{R}, z).$$

Wenn wir die oben gefundenen Werte der Winkel substituieren, die von dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ mit den Achsen x, y und z gebildet werden, erhalten wir:

$$\cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{RM}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für M_0 ein, so ergibt sich:

$$M_0 = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R}.$$

Die Größen R und M_0 hängen offensichtlich nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Hieraus folgt, daß auch die Ausdrücke $X^2 + Y^2 + Z^2$ und $XM_x + YM_y + ZM_z$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Wir nennen solche Ausdrücke *statische Invarianten des gegebenen Kräftesystems.*

§ 62. Die Gleichgewichtsgleichungen beliebig im Raum gelagerter Kräfte

Wir sahen, daß sich die beliebig im Raum gelagerten Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befinden, wenn ihr Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ gleich Null sind. Es gelten die Gleichungen:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Wir sehen, daß der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ bei der Erfüllung von sechs Bedingungen Null werden:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Beachten wir die im vorigen Paragraphen festgestellten Gleichungen für die Komponenten des Hauptvektors X, Y, Z und des Hauptmomentes M_x, M_y, M_z,

so schließen wir, daß sich die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befinden, wenn sie folgende sechs Gleichungen erfüllen:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \qquad Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0.$$

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = 0,$$

$$M_{1x} + M_{2x} + \cdots + M_{nx} = 0, \qquad M_{1y} + M_{2y} + \cdots + M_{ny} = 0,$$

$$M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz} = 0.$$

Dies sind die Gleichgewichtsgleichungen der beliebig im Raum gelagerten Kräfte. Die ersten drei Gleichungen nennen wir Projektionsgleichungen, die letzten drei Momentengleichungen.

Wir bemerken, daß die Momentengleichungen auch in folgender Weise geschrieben werden können:

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \qquad \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \qquad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

wobei x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}_i$ sind.

Da wir in dem betrachteten, allgemeinsten Fall der Kräfteverteilung sechs Gleichgewichtsgleichungen haben, schließen wir, daß eine Aufgabe, in der Kräfte enthalten sind, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen, beliebig im Raume verlaufen und sich im Gleichgewicht befinden, eine statisch bestimmte sein wird, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich sechs ist.

Wir nennen die Achsen, auf die die Kräfte projiziert werden, Projektionsachsen und die Achsen, um die herum die Momente aufgestellt werden, Momentenachsen. In den von uns aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen fallen die Projektionsachsen mit den Momentenachsen zusammen. Jedoch liegt in Anbetracht der Willkür der Achsen x, y und z keine Notwendigkeit vor, daß die Momentenachsen mit den Projektionsachsen zusammenfallen müssen. Wir bemerken, daß bei der Lösung von Aufgaben die Projektionsachsen, allgemein gesagt, senkrecht zu irgendeiner der unbekannten Kräfte verlaufen müssen. Die Momentenachsen müssen, allgemein gesagt, entweder parallel zu einer unbekannten Kraft liegen oder die Wirkungslinie einer unbekannten Kraft schneiden.

Bei einer solchen Wahl der Projektionsachsen und der Momentenachsen fallen die erwähnten unbekannten Kräfte aus den entsprechenden Gleichgewichtsgleichungen heraus.

§ 63. Die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers mit zwei befestigten Punkten. Die Bestimmung der Auflagerreaktionen

Als Anwendungsbeispiel der sechs Gleichgewichtsgleichungen eines festen Körpers betrachten wir die Frage des Gleichgewichts eines starren Körpers, der an zwei Punkten unbeweglich befestigt ist.

Wir stellen uns einen festen Körper vor, der an zwei Punkten O_1 und O_2 unbeweglich befestigt ist. Bei dieser Bedingung erscheint als einzig mögliche Bewegung des

gegebenen Körpers eine Rotation um die Gerade, die durch die Punkte O_1 und O_2 verläuft. An diesem starren Körper greifen die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an (Abb. 114). Es ist die Bedingung zu ermitteln, der die angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ entsprechen müssen, damit der gegebene Körper im Gleichgewicht bleibt.

An unserem starren Körper greifen außer den gegebenen Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ zwei weitere Kräfte an, und zwar die Reaktionen der befestigten Punkte O_1 und O_2. Wir bezeichnen diese Reaktionen mit den Buchstaben $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Da unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ der starre Körper im Gleichgewicht bleiben soll, müssen diese Kräfte die sechs Gleichgewichtsgleichungen befriedigen.

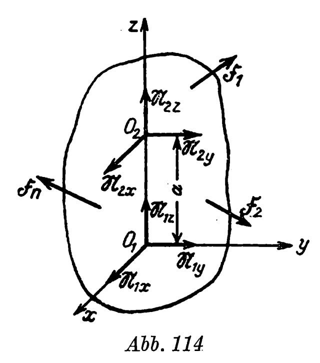


Abb. 114

Wir wählen die zueinander senkrechten Achsen x, y und z in folgender Weise: Als Koordinatenursprung wählen wir einen der befestigten Punkte, z. B. den Punkt O_1; die z-Achse lassen wir auf der Geraden O_1, O_2 verlaufen (d. h. auf der Rotationsachse unseres starren Körpers); die Achsen x und y legen wir durch den Punkt O_1 senkrecht zur Rotationsachse O_1, O_2. Die Reaktionen der befestigten Punkte $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zerlegen wir in drei Komponenten auf den Achsen x, y und z. Wir bezeichnen die Größen dieser Komponenten mit $N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}, N_{2x}, N_{2y}, N_{2z}$ und können nun die Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ durch ihre Komponenten ersetzen.

Die Reaktionen N_{1x}, N_{1y} und N_{2x}, N_{2y}, die senkrecht zur Drehachse z verlaufen, nennen wir Seitenreaktionen der befestigten Punkte, und die Reaktionen N_{1z} und N_{2z}, die auf der Drehachse liegen, nennen wir Längsreaktionen.

Wir schreiben sechs Gleichgewichtsgleichungen für unseren Körper auf. Nehmen wir $O_1O_2 = a$ an, so erhalten wir:

$$\sum X_i + N_{1x} + N_{2x} = 0,$$

$$\sum Y_i + N_{1y} + N_{2y} = 0,$$

$$\sum Z_i + N_{1z} + N_{2z} = 0,$$

$$\sum M_{ix} - a N_{2y} = 0,$$

$$\sum M_{iy} + a N_{2x} = 0,$$

$$\sum M_{iz} = 0.$$

Hier bezeichnen X_i, Y_i und Z_i die Projektionen der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen x y und z, M_{ix}, M_{iy} und M_{iz} dagegen sind die Momente der Kraft $\mathfrak{F}_i$ bezüglich der selben Achsen. Die Summierungen laufen über alle i-Werte von 1 bis n.

Die letzte Gleichgewichtsgleichung

$$\sum M_{iz} = 0$$

ist die einzige, in der die Reaktionen der befestigten Punkte nicht enthalten sind. Folglich stellt diese Gleichung die einzige Bedingung dar, der die angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ genügen müssen, damit der starre Körper im Gleichgewicht verbleibt.

Somit *besteht die Gleichgewichtsbedingung des starren Körpers mit zwei befestigten Punkten darin, daß die Summe der Momente der angreifenden Kräfte bezüglich der Drehachse Null sein muß.*

Die ersten fünf Gleichgewichtsgleichungen können zur Bestimmung der Reaktionen der befestigten Punkte dienen. Aus der vierten und fünften Gleichung ermitteln wir

$$N_{2x} = -\frac{1}{a} \sum M_{iy},$$

$$N_{2y} = \frac{1}{a} \sum M_{ix}.$$

Hierauf erhalten wir aus der ersten und zweiten Gleichung:

$$N_{1x} = \frac{1}{a} \sum M_{iy} - \sum X_i,$$

$$N_{1y} = -\frac{1}{a} \sum M_{ix} - \sum Y_i.$$

Schließlich finden wir aus der dritten Gleichung:

$$N_{1z} + N_{2z} = -\sum Z_i.$$

Wie ersichtlich, sind die Seitenreaktionen völlig bestimmt. Für die Längsreaktionen kann jedoch lediglich ihre Summe ermittelt werden, eine einzelne Reaktion wird durch die Gleichgewichtsgleichungen nicht bestimmt.

Wir stellen fest, daß die statische Unbestimmtheit bei der Ermittlung der Längsreaktionen beseitigt wird, wenn man voraussetzt, daß der Punkt O_1 unbeweglich befestigt ist und der Punkt O_2 frei (ohne Reibung) entlang der z-Achse gleiten kann. In diesem Fall wird die Längsreaktion N_{2z} Null, und die dritte Gleichgewichtsgleichung nimmt die Gestalt

$$\sum Z_i + N_{1z} = 0$$

an, woraus wir

$$N_{1z} = -\sum Z_i$$

erhalten.

Beispiel 21. Auf einer Transmissionswelle befinden sich zwei Scheiben A und B für den Riemenantrieb (Abb. 115). Die Radien der Scheiben sind r_1 und r_2, die Abstände der Scheiben vom Lager gleich a und b, der Abstand zwischen den Lagern C und D ist l. Der Riemenantrieb der Scheibe A bildet den Winkel α mit der Horizontalen, der

Riemenantrieb auf der Scheibe B ist horizontal gerichtet. Gegeben seien die Zugkräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ des ersten Riemenantriebes und die Zugkraft $\mathfrak{T}_3$ des oberen Riemens des zweiten Riemenantriebes. Es soll ermittelt werden, bei welcher Zugkraft $\mathfrak{T}_4$ des unteren Riemens vom zweiten Riemenantrieb die Welle, an der die Kräfte angreifen, im Gleichgewicht bleibt. Es sind ebenfalls die Seitenreaktionen der Lager zu bestimmen, die von den Riemenzügen hervorgerufen werden.

Auf die Welle wirken die Riemenzugkräfte und die Reaktionen der Lager. Wir stellen die Gleichgewichtsgleichungen für diese Kräfte auf. Dazu wählen wir die zueinander senkrechten Achsen x, y und z, deren Koordinatenursprung der Punkt C ist, und lassen die x-Achse mit der Wellenachse zusammenfallen. Die y-Achse verläuft horizontal, die z-Achse vertikal. Die Seitenreaktionen des Lagers C auf den Achsen y und z bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, die Seitenreaktionen des Lagers D auf denselben Achsen mit $\mathfrak{N}_3$ und $\mathfrak{N}_4$.

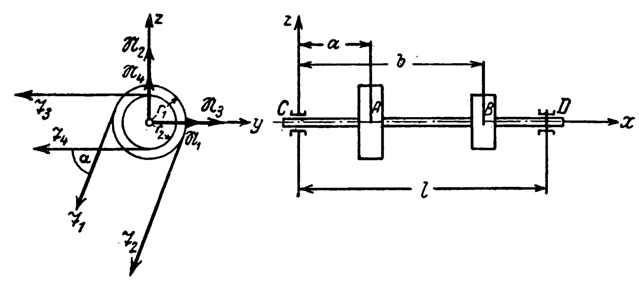


Abb. 115

Um die Zugkraft $\mathfrak{T}_4$ zu bestimmen, stellen wir die Gleichung der Momente bezüglich der x-Achse auf:

$$T_1 r_1 - T_2 r_1 + T_3 r_2 - T_4 r_2 = 0,$$

und daraus:

$$T_4 = T_3 - \frac{r_1}{r_2}(T_2 - T_1).$$

Um die Seitenreaktionen $\mathfrak{N}_3$ und $\mathfrak{N}_4$ des Lagers D zu ermitteln, stellen wir die Momentengleichungen bezüglich der Achsen y und z auf:

$$l N_4 - a T_1 \sin\alpha - a T_2 \sin\alpha = 0,$$

$$l N_3 = a T_1 \cos\alpha - a T_2 \cos\alpha - b T_3 - b T_4 = 0,$$

woraus

$$N_4 = \frac{a}{l}(T_1 + T_2)\sin\alpha,$$

$$N_3 = \frac{a}{l}(T_1 + T_2)\cos\alpha + \frac{b}{l}(T_3 + T_4$$

folgt.

Schließlich projizieren wir, um die Seitenreaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ des Lagers C zu bestimmen, die Kräfte auf die Achsen y und z:

$$N_1 + N_3 - T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha - T_3 - T_4 = 0,$$

$$N_2 + N_4 - T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0,$$

woraus sich

$$N_1 = (T_1 + T_2)\cos\alpha - (T_3 + T_4) - N_3,$$

$$N_2 = (T_1 + T_2)\sin\alpha - N_4$$

ergibt.

Wir führen die Berechnungen aus, indem wir $T_1 = 200$ kg, $T_2 = 400$ kg, $T_3 = 500$ kg, $r_1 = 25$ cm, $r_2 = 20$ cm, $a = 1$ m, $b = 3$ m, $l = 4$ m, $\alpha = 70°$ annehmen, und erhalten:

$$T_4 = 500 - \frac{25}{20}(400 - 200) = 250 \text{ kg},$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot 600 \cdot \sin 70° = 141 \text{ kg},$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot 600 \cdot \cos 70° - \frac{3}{4} \cdot 750 = 614 \text{ kg},$$

$$N_1 = 600 \cdot \cos 70° + 750 - 614 = 341 \text{ kg},$$

$$N_2 = 600 \cdot \sin 70° - 141 = 423 \text{ kg}.$$

§ 64. Die Bestimmung des Hauptvektors und des Hauptmomentes durch das Experiment

Als Anwendungsbeispiel der Gleichgewichtsgleichungen betrachten wir noch folgendes Verfahren einer experimentellen Bestimmung des Hauptvektors und des Hauptmomentes der an einem starren Körper angreifenden Kräfte.

Der gegebene Körper (z. B. das Modell einer Anlage) ist auf eine runde Plattform gestellt, die sich auf sechs Stäbe stützt (Abb. 116). Drei dieser Stäbe sind vertikal und drei horizontal gerichtet, die Verteilung der Stäbe ist in Abb. 116 gezeigt (im Aufriß und im Grundriß, die Stäbe sind mit den Ziffern 1 bis 6 bezeichnet). Auf den gegebenen Körper wirken irgendwelche Kräfte $\mathfrak{F}_i$ ein (z. B. der Winddruck). Der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ dieser Kräfte sollen gemessen werden, wobei als Reduktionszentrum beispielsweise der Punkt O angenommen wird.

Wir legen durch den Punkt O die zueinander senkrechten Koordinatenachsen x, y und z (die Richtungen dieser Achsen sind in Abb. 116 angegeben). Wir bezeichnen die Komponenten des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ auf diesen Achsen mit X, Y, Z, M_x, M_y, M_z (die drei letzteren Größen sind gleichzeitig die Hauptmomente der Kräfte $\mathfrak{F}_i$ bezüglich der Achsen x, y und z).

Wir ermitteln diese sechs Größen, indem wir sechs Gleichgewichtsgleichungen für die Kräfte aufstellen, die an dem Körper und an der Plattform, auf der er steht, angreifen.

An dem Körper und der Plattform wirken die Kräfte $\mathfrak{F}_i$, das Gewicht $\mathfrak{P}$ des Körpers und der Plattform, das an ihrem gemeinsamen Schwerpunkt angreift, und die Reaktionen der Stäbe, auf die sich die Plattform stützt. Wir werden alle Stäbe als Druckstäbe ansehen und ihre Reaktionen (oder die Druckkräfte in ihnen) mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_6$ bezeichnen. Wird einer der Stäbe gezogen, so werden wir die Zugkraft in ihm als negative Druckkraft betrachten. Da sich alle aufgezählten Kräfte gegenseitig aufheben, müssen sie die sechs gewonnenen Gleichgewichtsgleichungen befriedigen. Indem wir alle Kräfte auf die Achsen x, y und z projizieren und die Momentengleichungen bezüglich derselben Achsen aufstellen, erhalten wir die nachstehenden Gleichgewichtsgleichungen:

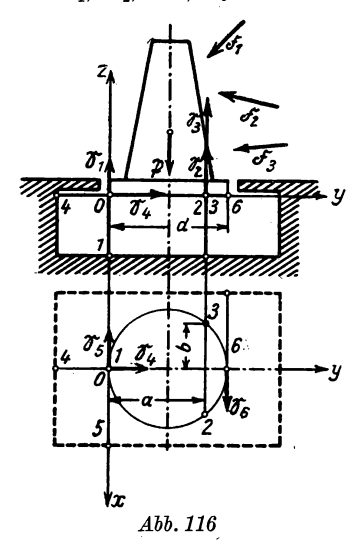


Abb. 116

$$X - S_5 + S_6 = 0,$$

$$Y + S_4 = 0,$$

$$Z - P + S_1 + S_2 + S_3 = 0,$$

$$M_x - P\frac{d}{2} + S_2 a + S_3 a = 0,$$

$$M_y - S_2 b + S_3 b = 0,$$

$$M_z - S_6 d = 0,$$

wobei die Buchstaben a, b und d die in Abb. 116 angegebenen Bedeutungen haben.

Hieraus finden wir:

$$X = S_5 - S_6,$$

$$Y = -S_4,$$

$$Z = P - S_1 - S_2 - S_3,$$

$$M_x = P\frac{d}{2} - (S_2 + S_3)a,$$

$$M_y = (S_2 - S_3)b,$$

$$M_z = S_6 d.$$

Auf diese Weise können wir, wenn wir die Größen P, a, b, d kennen und durch den Versuch die Kräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_6$ bestimmen, die Komponenten des Hauptvektors und des Hauptmomentes der uns interessierenden Kräfte $\mathfrak{F}_i$ errechnen. Mit

diesen Komponenten können wir hierauf natürlich auch die Größen und die Richtungen des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ berechnen. Wenn die Kräfte $\mathfrak{F}_i$ auf eine Resultierende reduziert werden, können wir Größe, Richtung und Wirkungslinie dieser Resultierenden ermitteln usw.

Die Kräfte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_6$ sind leicht zu bestimmen, wenn die Stäbe 1, 2, ..., 6 in Form eines Dynamometers konstruiert werden: Jeder Stab muß aus zwei leicht gebogenen elastischen Leisten zusammengesetzt sein (Abb. 117). Die an den Enden des Stabes angreifenden Kräfte rufen eine Durchbiegung der Leisten hervor, die leicht gemessen werden kann.

Ein solches Verfahren wurde von MÜLLER-BRESLAU zur Untersuchung des Erddrucks auf die Stützwände angewandt.

Abb. 117

§ 65. Die Addition paralleler Kräfte im Raum. Die Gleichgewichtsgleichungen der parallelen Kräfte

Wir wollen die Ergebnisse, die wir bei der Addition von beliebig im Raum gelegenen Kräften gewonnen haben, auf Parallelkräfte anwenden.

Gegeben seien die parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen (Abb. 118). Diese Kräfte sind zu addieren.

Wir wählen ein beliebiges Reduktionszentrum O und reduzieren (übereinstimmend mit dem in § 54 Dargelegten) die gegebenen Kräfte auf die Kraft, die an dem Punkte O angreift und gleich dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ der gegebenen Kräfte ist, und auf ein Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ der gegebenen Kräfte bezüglich des Punktes ist.

Wir beginnen mit der Berechnung des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$. Für die Berechnung benutzen wir die Gleichungen, die in § 61 aufgestellt wurden.

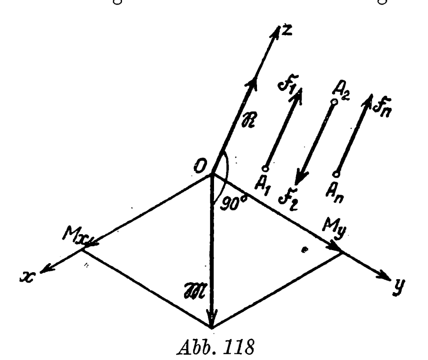


Abb. 118

Wir legen durch das Reduktionszentrum O drei zueinander senkrechte Achsen x, y und z, wobei wir die z-Achse parallel zu den gegebenen Kräften verlaufen lassen (dann stehen die Achsen x und y senkrecht auf diesen Kräften).

Wir berechnen die Komponenten X, Y, Z des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ auf den Achsen x, y, z und gewinnen die Gleichungen

$$X = \sum X_i, \qquad Y = \sum Y_i, \qquad Z = \sum Z_i,$$

wobei Σ das Zeichen der Summierung ist und X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen x, y und z bedeuten ($i = 1, 2, \ldots, n$). Da die gegebenen Kräfte jedoch parallel zu der z-Achse sind, gilt:

$$X_i = 0, \qquad Y_i = 0, \qquad Z_i = \pm F_i,$$

und zwar ist $Z_i = +F_i$, wenn die Kraft $\mathfrak{F}_i$ in Richtung der positiven z-Achse verläuft (wie z. B. die Kraft $\mathfrak{F}_1$ in Abb. 118), und $Z_i = -F_i$, wenn die Kraft $\mathfrak{F}_i$ in Richtung der negativen z-Achse verläuft (wie z. B. die Kraft $\mathfrak{F}_2$). Folglich ist

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = \sum (\pm F_i).$$

Da $X = 0$ und $Y = 0$ sind, verläuft der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ auf der z-Achse, seine Größe ist gleich dem absoluten Betrag seiner Komponente Z:

$$R = |Z| = |\sum (\pm F_i)|.$$

Ist $Z = \Sigma (\pm F_i) > 0$, so verläuft der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ in Richtung der positiven z-Achse, wenn jedoch $Z = \Sigma (\pm F_i) < 0$ ist, verläuft der Hauptvektor in Richtung der negativen z-Achse (in Abb. 118 ist $Z = \Sigma (\pm F_i) > 0$ vorausgesetzt).

Wir gehen zur Berechnung des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ über und berechnen zuerst die Komponenten von $\mathfrak{M}$ auf den Achsen x, y und z oder, was dasselbe ist, die Hauptmomente M_x, M_y, M_z bezüglich dieser Achsen, und erhalten die Gleichungen:

$$M_x = \sum M_{ix},$$
$$M_y = \sum M_{iy},$$
$$M_z = \sum M_{iz},$$

wobei M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} die Momente der Kraft $\mathfrak{F}_i$ bezüglich der Achsen x, y und z sind.

Da alle gegebenen Kräfte parallel zur z-Achse liegen, ist

$$M_{iz} = 0$$

und infolgedessen

$$M_z = 0.$$

Hieraus folgt, daß das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ senkrecht zur z-Achse steht, d. h., es liegt in der xy-Ebene. Um es zu errichten, ist ein Rechteck aus den Momenten M_x und M_y (die vom Punkte O aus in Richtung der Achsen x und y abgetragen werden) zu konstruieren und darin die Diagonale durch O zu führen. Die Größe des Hauptmomentes M ist gleich

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Somit verläuft der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ auf der z-Achse, während das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ in der xy-Ebene liegt. Folglich ist

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{M}) = 90^\circ.$$

Untersuchen wir jetzt, welche Resultate sich aus der Addition der gegebenen Parallelkräfte ergeben. In bezug auf die Größen des Hauptvektors $\mathfrak{R}$ und des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ unterscheiden wir drei Fälle:

1. Der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ sind Null.

In diesem Falle befinden sich die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

2. Der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ ist Null, das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ ist jedoch ungleich Null.

In diesem Falle werden die gegebenen Kräfte auf ein Kräftepaar reduziert, dessen Moment gleich dem Hauptmoment $\mathfrak{M}$ ist.

3. Der Hauptvektor $\mathfrak{R}$ ist ungleich Null. Bezüglich des Hauptmomentes $\mathfrak{M}$ sind zwei Voraussetzungen möglich: Entweder ist $\mathfrak{M} = 0$ oder $\mathfrak{M} \neq 0$. Ist aber $\mathfrak{M} \neq 0$, so steht $\mathfrak{M}$, wie die vorige Untersuchung zeigte, senkrecht auf $\mathfrak{R}$. Also ist das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ entweder gleich Null oder senkrecht zum Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gerichtet. Indem wir uns des in § 57 Dargelegten erinnern, schließen wir, daß im betrachteten Falle die gegebenen Kräfte auf eine Resultierende zurückgeführt werden, die dem Hauptvektor $\mathfrak{R}$ gleich ist.

Wie wir sehen, werden die parallelen Kräfte in keinem Falle auf eine Kraftschraube reduziert.

Wir sahen, daß sich die gegebenen parallelen Kräfte dann im Gleichgewicht befinden, wenn ihr Hauptvektor $\mathfrak{R}$ und das Hauptmoment $\mathfrak{M}$ gleich Null sind. Es galt die Gleichung

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Folglich ist für $\mathfrak{M} = 0$ notwendig und hinreichend, daß

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0$$

sind.

Erinnern wir uns der Abhängigkeiten

$$R = \left|\sum(\pm F_i)\right|, \qquad M_x = \sum M_{ix}, \qquad M_y = M_{iy},$$

so können wir schließen, daß sich die parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befinden, wenn sie die drei Gleichungen

$$\sum(\pm F_i) = 0, \qquad \sum M_{ix} = 0, \qquad \sum M_{iy} = 0$$

befriedigen.

Dies sind die Gleichgewichtsgleichungen paralleler Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen. Wir erinnern daran, daß in der Summe $\Sigma(\pm F_i)$ die Größen der Kräfte, die nach einer Richtung verlaufen, mit dem Pluszeichen, die Größen der Kräfte jedoch, die nach der entgegengesetzten Richtung verlaufen, mit dem Minuszeichen enthalten sind.

Da wir in dem betrachteten Falle drei Gleichgewichtsgleichungen finden, handelt es sich bei einer Aufgabe, in der parallele Kräfte auftreten, die nicht in einer Ebene liegen und sich im Gleichgewicht befinden, um eine statisch bestimmte, wenn die Anzahl der Unbekannten in ihr gleich drei ist.

§ 66. Die Addition paralleler Kräfte nach der Methode der aufeinanderfolgenden Addition

Im oben Dargelegten zeigten wir die Addition der gegebenen Parallelkräfte mit Hilfe der Reduktion aller Kräfte auf einen Punkt. Wir stellen jetzt fest, daß die Addition dieser Kräfte auch nach der Methode der aufeinanderfolgenden Addition durchgeführt werden kann.

Gegeben seien die Parallelkräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_5$, $\mathfrak{F}_6$, die an den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 angreifen (Abb. 119). Von ihnen sind die Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ nach der einen und die Kräfte $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_5$, $\mathfrak{F}_6$ nach der entgegengesetzten Seite gerichtet. Es wird die Addition dieser Kräfte gefordert (wir beschränken uns auf den Fall von sechs Kräften, die Überlegung bleibt jedoch richtig für jede beliebige Anzahl von Kräften).

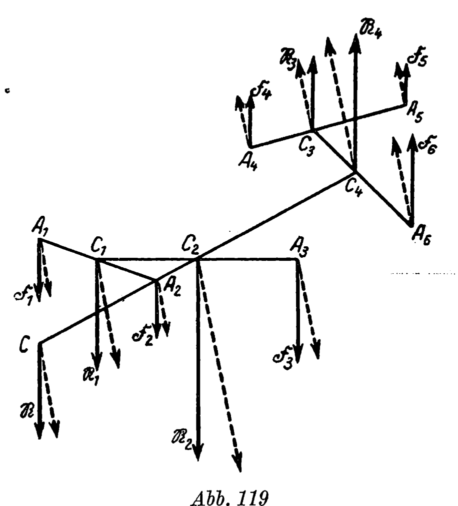


Abb. 119

Wir addieren die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nach der Additionsregel zweier paralleler Kräfte, die nach einer Richtung verlaufen, und erhalten ihre Resultierende $\mathfrak{R}_1$ ($R_1 = F_1 + F_2$), die an dem Punkte C_1 angreift. Der Punkt C_1 liegt auf dem Abschnitt $A_1 A_2$ und teilt diesen Abschnitt in zwei Teile, die umgekehrt proportional den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind, so daß

$$\frac{A_1 C_1}{C_1 A_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

ist.

Hierauf addieren wir die Kraft $\mathfrak{R}_1$ und die Kraft $\mathfrak{F}_3$. Wir erhalten die Resultierende $\mathfrak{R}_2$ ($R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$), die an dem Punkte C_2 auf dem Abschnitt $C_1 A_3$ angreift, wobei

$$\frac{C_1 C_2}{C_2 A_3} = \frac{F_3}{R_1}$$

ist.

Genau so addieren wir die Kräfte $\mathfrak{F}_4$ und $\mathfrak{F}_5$ und erhalten die Resultierende $\mathfrak{R}_3$($R_2 = F_4 + F_5$), die an dem Punkte C_3 auf dem Abschnitt $A_4 A_5$ angreift, wobei

$$\frac{A_4 C_3}{C_3 A_5} = \frac{F_5}{F_4}$$

ist.

Schließlich addieren wir die Kräfte $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{F}_6$ und erhalten ihre Resultierende $\mathfrak{R}_4$ ($R_4 = R_3 + F_6 = F_4 + F_5 + F_6$), die an dem Punkte C_4 auf dem Abschnitt $C_3 A_6$ angreift, wobei

$$\frac{C_3 C_4}{C_4 A_6} = \frac{F_6}{R_3}$$

ist.

Somit ist das gegebene Kräftesystem auf zwei parallele Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ reduziert worden, die nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen.

Es kann einer der folgenden drei Fälle auftreten:

1. *Die Kräfte* $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ *sind der Größe nach nicht gleich.* Wir nehmen $R_2 > R_4$ an. Addieren wir die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ nach der Additionsregel zweier paralleler Kräfte, die entgegengesetzt gerichtet sind, so erhalten wir ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ ($R = R_2 - R_4$).

Die Resultierende $\mathfrak{R}$ verläuft in Richtung der größeren Kraft (d. h. $\mathfrak{R}_2$) und greift an dem Punkte C an, der auf der Seite der größeren Kraft auf der Verlängerung des Abschnittes C_2C_4 liegt, wobei

$$\frac{CC_2}{CC_4} = \frac{R_4}{R_2}$$

ist.

Somit wird im betrachteten Fall das gegebene Kräftesystem auf eine Resultierende $\mathfrak{R}$ reduziert.

2. *Die Kräfte* $\mathfrak{R}_2$ *und* $\mathfrak{R}_4$ *sind der Größe nach gleich, ihre Wirkungslinien fallen jedoch nicht zusammen.* Die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ bilden ein Kräftepaar. Folglich wird in diesem Fall das gegebene System paralleler Kräfte auf ein Kräftepaar reduziert.

3. *Die Kräfte* $\mathfrak{R}_2$ *und* $\mathfrak{R}_4$ *sind der Größe nach gleich, und ihre Wirkungslinien fallen zusammen.* In diesem Fall heben sich die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ gegenseitig auf, und die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_6$ befinden sich im Gleichgewicht.

Somit kommen wir auf anderem Wege zu denselben Ergebnissen, die bereits in § 65 aufgestellt wurden.

§ 67. Das Zentrum der parallelen Kräfte

Wir wollen uns noch mit einem Fall befassen, bei dem die parallelen Kräfte auf eine Resultierende zurückgeführt werden. Die Überlegungen im vorigen Paragraphen führten uns zum Festlegen des Angriffspunktes der Resultierenden. In Abb. 119 ist dieser Punkt mit dem Buchstaben C bezeichnet.

Wir merken uns eine wichtige Eigenschaft des Punktes C: Wenn man die gegebenen Kräfte um ihre Angriffspunkte dreht, ohne ihre Parallelität zu stören, dann wird die Resultierende, die parallel den gegebenen Kräften bleibt, um den Punkt C gedreht.

Wir drehen die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_6$ um ihre Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots, A_6$, ohne ihre Parallelität zu stören (Abb. 119). Wir wollen zeigen, daß sich hierbei die Resultierende $\mathfrak{R}$, die parallel den gegebenen Kräften verbleibt, um den Punkt C dreht.

Wir ermitteln die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in ihrer neuen Lage. Da in der neuen Lage die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ parallel bleiben und nach einer Seite hin verlaufen, hat ihre Resultierende wie früher die Größe $F_1 + F_2 = R_1$ und greift an dem Punkte an, der den Abschnitt A_1A_2 in zwei Teile teilt, die umgekehrt proportional den Größen der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind, d. h. im Punkte C_1.

Folglich erhalten wir die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in ihrer neuen Lage, indem wir die frühere Resultierende $\mathfrak{R}_1$ um den Punkt C_1 drehen. Genau so erhalten wir die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ in ihrer neuen Lage, wenn wir die frühere Resultierende $\mathfrak{R}_1$ um den Punkt C_2 drehen. Wird diese Überlegung auf die Kräfte $\mathfrak{F}_4$ und $\mathfrak{F}_5$ und hierauf auf die Kräfte $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{F}_6$ angewandt, so überzeugen wir uns, daß ihre Resultierenden in der neuen Lage den Kräften $\mathfrak{R}_3$ bzw. $\mathfrak{R}_4$ gleich sind, die um die Punkte C_2 und C_4 gedreht wurden. Addieren wir jetzt die Kräfte $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ (die an den Punkten C_2 und C_4 angreifen), so sehen wir, daß ihre Resultierende wie früher $R_2 + R_4 = R$ ist und an demselben Punkte C wie früher angreift. Auf diese Weise erhalten wir die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_6$ in ihrer neuen Lage durch die Drehung der früheren Resultierenden $\mathfrak{R}$ um den Punkt C.

Der Punkt C heißt *Zentrum der parallelen Kräfte* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_6$.

§ 68. Die Koordinaten des Zentrums der parallelen Kräfte

Werden die parallelen Kräfte auf eine Resultierende reduziert, so ist das Zentrum der gegebenen parallelen Kräfte vor allem geeignet, als Angriffspunkt dieser Resultierenden zu dienen. Stellen wir jetzt die Gleichungen zur Berechnung der Koordinaten des Zentrums der parallelen Kräfte auf.

Abb. 120

Gegeben seien die parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angreifen (Abb. 120). Wir stellen die algebraische Summe der Kräfte

$$F_1 - F_2 \pm \cdots + F_n = \sum(\pm F_i)$$

zusammen (in dieser Summe sind mit dem Pluszeichen die Kräfte enthalten, die in Richtung der Kraft $\mathfrak{F}_1$ verlaufen).

Wir setzen voraus, daß $\Sigma(\pm F_i) \neq 0$ ist, und zwar soll gelten: $\Sigma(\pm F_i) > 0$. Sodann werden die gegebenen Kräfte auf die Resultierende zurückgeführt, die der Größe nach

$$R = \sum(\pm F_i)$$

ist und in Richtung der Kraft $\mathfrak{F}_1$ verläuft. Als Angriffspunkt der Resultierenden $\mathfrak{R}$ wählen wir das Zentrum C der gegebenen parallelen Kräfte.

Wir wählen die Koordinatenachsen x, y und z und bezeichnen die Koordinaten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte mit A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, A_n (x_n, y_n, z_n). Die Koordinaten des Zentrums der parallelen Kräfte bezeichnen wir mit C (x_c, y_c, z_c).

Wir drehen alle Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ um die Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ohne ihre Parallelität zu stören) so, daß alle Kräfte parallel zur z-Achse verlaufen (und zwar so, daß die Kraft $\mathfrak{F}_1$ in Richtung der positiven z-Achse verläuft). Dann

wird die Resultierende sich um den Punkt C drehen und auch parallel der z-Achse sein (und dabei in der Richtung der positiven z-Achse verlaufen).

Wir stellen jetzt die Momente der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und der Resultierenden $\mathfrak{R}$ bezüglich der x-Achse auf und bemerken, daß das Moment der Resultierenden gleich der Summe der Komponentenmomente ist. Wir erhalten (Abb. 120):

$$R y_c = F_1 y_1 - F_2 y_2 \pm \cdots + F_n y_n = \sum (\pm F_i y_i),$$

woraus wir, wenn wir $R = \sum (\pm F_i)$ setzen, ermitteln:

$$y_c = \frac{\Sigma(\pm F_i y_i)}{\Sigma(\pm F_i)}. \tag{1}$$

Es ist wichtig, zu bemerken, daß die Kräfte, die mit Pluszeichen in der Summe $\Sigma (\pm F_i)$ enthalten sind, mit demselben Zeichen in der Summe $\Sigma (\pm F_i y_i)$ vorhanden sind. Die Kräfte, die mit dem Minuszeichen in der Summe $\Sigma (\pm F_i)$ enthalten sind, haben auch das Minuszeichen in der Summe $\Sigma (\pm F_i y_i)$.

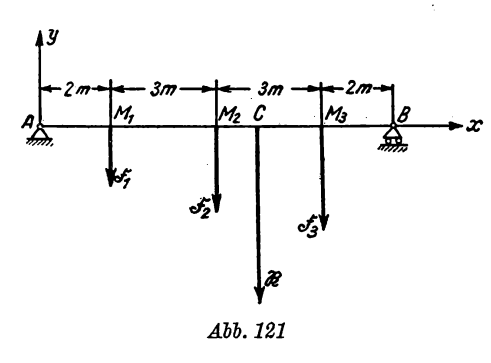


Abb. 121

Wenn wir alle Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ um den Angriffspunkt so drehen, daß sie parallel zur y-Achse liegen und alle Momente zuerst bezüglich der z-Achse aufstellen und dann bezüglich der x-Achse, erhalten wir zwei andere Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\Sigma(\pm F_i x_i)}{\Sigma(\pm F_i)}, \\ z_c &= \frac{\Sigma(\pm F_i z_i)}{\Sigma(\pm F_i)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Auch in diesen Gleichungen hat jede Kraft in den Summen

$$\sum (\pm F_i x_i) \quad \text{und} \quad \sum (\pm F_i z_i)$$

dasselbe Vorzeichen wie in der Summe $\Sigma(\pm F_i)$.

Mit den Gleichungen (1) und (2) bestimmt man die Koordinaten des Zentrums der parallelen Kräfte. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß diese Gleichungen, die unter der Voraussetzung aufgestellt sind, daß $\Sigma (\pm F_i) > 0$ ist, in dem Falle

$$\sum (\pm F_i) < 0$$

richtig bleiben.

Beispiel 22. An dem Balken AB wirken in den Punkten M_1, M_2, M_3 die senkrechten Kräfte $F_1 = 1$ t, $F_2 = 2$ t, $F_3 = 3$ t; $AM_1 = 2$ m, $M_1M_2 = 3$ m, $M_2M_3 = 3$ m, $M_3B = 2$ m (Abb.121). Es sind diese Kräfte zu addieren.

Wir ermitteln die Größe der Resultierenden $\mathfrak{R}$:

$$R = 1 + 2 + 3 = 6\,\mathrm{t}.$$

Als Angriffspunkt der Resultierenden wählen wir das Zentrum der gegebenen Kräfte. Da die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ auf der Geraden AB liegen, liegt auch das Zentrum dieser Kräfte auf derselben Geraden. Wir lassen die x-Achse auf der Geraden AB verlaufen, wobei wir den Koordinatenursprung im Punkt A annehmen, und berechnen die Koordinate x_c des Zentrums der gegebenen Kräfte.

Wir erhalten:

$$x_c = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8}{6} = 6\,\mathrm{m}.$$

Mit dieser Koordinate ist der Angriffspunkt C der Resultierenden bestimmt.

KAPITEL XI

DER SCHWERPUNKT

§ 69. Der Schwerpunkt eines starren Körpers. Der Schwerpunkt eines Volumens

Befindet sich ein fester Körper in der Nähe der Erdoberfläche, so greift an jedem Teilchen M_i dieses starren Körpers eine senkrecht verlaufende Schwerkraft p_i an, die Anziehungskraft der Erdkugel (Abb. 122). Die an den einzelnen Teilchen des festen Körpers angreifenden Schwerkräfte p_i kann man als parallel ansehen. Die Resultierende der parallelen Kräfte p_i,

$$P = \sum p_i,$$

heißt das *Gewicht des starren Körpers*, und das Zentrum C dieser parallelen Kräfte heißt der *Schwerpunkt des starren Körpers*.

Es ist wichtig, zu bemerken, daß der Schwerpunkt in diesem Körper eine völlig bestimmte Lage hat, die nicht von der Lage des Körpers im Raume abhängt. Wir werden die Lage des Körpers verändern. Wie wir ihn auch drehen und wenden, die Schwerkraft p_i seiner einzelnen Teilchen greift an denselben Punkten des Körpers M_i an. Diese Kräfte p_i, die eine konstante senkrechte Richtung im Raume beibehalten, werden ihre Richtung in bezug auf den Körper verändern: Bezüglich des Körpers werden sie sich um ihre Angriffspunkte M_i drehen, wobei sie die eigene Parallelität bewahren. Wir wissen jedoch, daß bei einer solchen Drehung der parallelen Kräfte ihr Zentrum nicht seine Lage verändert. Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt, wie wir auch den Körper drehen wollten, seine Lage im Körper nicht verändert.

Zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eines starren Körpers kann man die Gleichungen für die Koordinaten des Zentrums der parallelen Kräfte benutzen, die in § 68 aufgestellt sind.

Wenn wir die Koordinaten des Schwerpunktes C (bezüglich irgendwelcher Koordinatenachsen x, y, z) mit x_c, y_c, z_c bezeichnen und die Koordinaten eines beliebigen Teilchens M_i des starren Körpers mit x_i, y_i, z_i, so gilt:

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} = \frac{\Sigma p_i x_i}{P},$$

$$y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i} = \frac{\Sigma p_i y_i}{P},$$

$$z_c = \frac{\Sigma p_i z_i}{\Sigma p_i} = \frac{\Sigma p_i z_i}{P},$$

wobei die Summierungen über alle Teilchen des starren Körpers ausgedehnt sind.

Wenden wir nun diese Formeln auf den Sonderfall eines homogenen Körpers an. Wir bezeichnen das sehr kleine Volumen des Teilchens M_i mit Δv_i. Ist der Stoff des Körpers homogen, so hat das Verhältnis $p_i : \Delta v_i$ für alle Teilchen des Körpers einen festen Wert. Nehmen wir an:

$$\frac{p_i}{\Delta v_i} = \omega,$$

so folgt hieraus

$$p_i = \omega \Delta v_i.$$

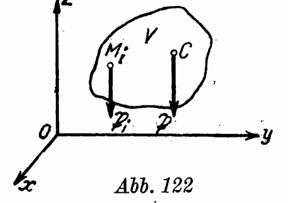


Abb. 122

Das Gewicht des homogenen Körpers wird durch die Gleichung

$$P = \Sigma p_i = \Sigma \omega \Delta v_i = \omega \Sigma \Delta v_i = \omega V$$

ausgedrückt, wobei V das Gesamtvolumen des Körpers ist. Indem wir hier $V = 1$ annehmen, erhalten wir $P = \omega$. Folglich ist ω das Gewicht der Raumeinheit des gegebenen homogenen Stoffes.

Für die Koordinaten des Schwerpunktes eines homogenen Körpers erhalten wir die Formeln

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P} = \frac{\Sigma \omega x_i \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\omega \Sigma x_i \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\Sigma x_i \Delta v_i}{V},$$

und genauso

$$y_c = \frac{\Sigma y_i \Delta v_i}{V}; \qquad z_c = \frac{\Sigma z_i \Delta v_i}{V}.$$

Diese Koordinaten hängen offensichtlich nicht von der Konstanten ω ab, die den Stoff des gegebenen homogenen Körpers charakterisiert.

Auf dieser Basis erhält der Schwerpunkt des homogenen Körpers die Bezeichnung „Schwerpunkt des Volumens V".

Somit heißt der Schwerpunkt eines homogenen Körpers, der den gegebenen Rauminhalt erfüllt, Schwerpunkt des Volumens.

§ 70. Der Schwerpunkt einer Fläche. Das statische Moment einer ebenen Figur. Der Schwerpunkt einer Linie

Mit dem Begriff des Schwerpunktes eines starren Körpers ist auch der Begriff des Schwerpunktes einer Fläche und des Schwerpunktes einer Linie verbunden.

Stellen wir uns eine ebene Figur vor, die durch irgendeine geschlossene Kontur begrenzt wird (Abb. 123). Die Fläche dieser ebenen Figur bezeichnen wir mit S. In der Ebene der gegebenen ebenen Figur wählen wir die zueinander senkrechten Achsen x und y (die z-Achse, die senkrecht zu den Achsen x und y liegt, ist in der Abbildung nicht dargestellt).

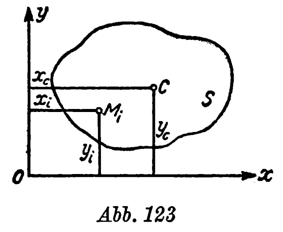


Abb. 123

Wir stellen uns nun eine äußerst dünne ebene Platte vor, die den Umriß der gegebenen ebenen Figur aufweist. Die äußerst geringe Stärke dieser Platte werden wir als konstant und den Stoff der Platte als homogen voraussetzen.

Um den Punkt M_i herum sondern wir ein Element der Platte aus, dessen Fläche wir Δs_i nennen und dessen Gewicht p_i beträgt. Das Verhältnis $p_i : \Delta s_i$ hat einen festen Wert für alle Elemente der Platte:

$$\frac{p_i}{\Delta s_i} = \sigma,$$

daraus folgt

$$p_i = \sigma \cdot \Delta s_i.$$

Das Gewicht einer solchen homogenen Platte ist gleich

$$P = \Sigma p_i = \Sigma \sigma \Delta s_i = \sigma \Sigma \Delta s_i = \sigma S,$$

wobei S die Fläche der ebenen Figur ist, die von der gegebenen Kontur umgrenzt wird. Indem wir hier $S = 1$ annehmen, erhalten wir $P = \sigma$. Folglich ist σ das Gewicht der Flächeneinheit der gegebenen homogenen Platte.

Für die Koordinaten des Schwerpunktes C der Platte erhalten wir die Gleichungen

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P} = \frac{\Sigma \sigma x_i \Delta s_i}{\sigma S} = \frac{\sigma \Sigma x_i \Delta s_i}{\sigma S} = \frac{\Sigma x_i \Delta s_i}{S},$$

und genauso

$$y_c = \frac{\Sigma y_i \Delta s_i}{S}.$$

Hierin sind x_i, y_i die Koordinaten des Punktes M_i; die Summierungen laufen über alle Elemente der Platte. Was die Koordinate z_c anbetrifft, so ist offensichtlich

$$z_c = 0.$$

Wie ersichtlich, hängen die Koordinaten des Schwerpunktes C nicht von der Konstanten σ ab, die den Stoff der Platte charakterisiert. Aus diesem Grunde erhält der Schwerpunkt einer homogenen Platte die Bezeichnung Schwerpunkt der Fläche S.

Somit *heißt der Schwerpunkt einer homogenen Platte von konstanter Stärke, die den Umriß der gegebenen ebenen Figur aufweist, Schwerpunkt der Fläche der ebenen Figur.*

Wir bemerken, daß die Summe der Produkte aus Flächenelement der ebenen Figur und seinem Abstand bezüglich irgendeiner Achse (die in der Ebene der Figur liegt)[1] das *statische Moment der ebenen Figur* bezüglich dieser Achse heißt. Übereinstimmend damit sind die Summen $\Sigma x_i \Delta s_i$ und $\Sigma y_i \Delta s_i$ die statischen Momente unserer ebenen Figur bezüglich der Achsen y und x. Wenn wir diese statischen Momente mit M_y und M_x bezeichnen:

$$\sum x_i \Delta s_i = M_y, \qquad \sum y_i \Delta s_i = M_x,$$

erhalten wir für die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche der ebenen Figur die Gleichungen

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \qquad y_c = \frac{M_x}{S}.$$

Abb. 124

Aus diesen Gleichungen werden die Koordinaten des Schwerpunktes berechnet, wenn die statischen Momente M_x und M_y bekannt sind. Umgekehrt können, wenn die Lage des Schwerpunktes bekannt ist, die statischen Momente M_x und M_y aus den Gleichungen

$$M_x = S\,y_c, \qquad M_y = S\,x_c$$

ermittelt werden.

Wir gehen zum Begriff des Schwerpunktes der Linie über. Stellen wir uns den Bogen einer krummen Linie L (Abb. 124) und ferner einen äußerst dünnen Draht mit rundem Querschnitt vor, dessen Achse auf dem gegebenen Bogen der krummen Linie liegt.[2] Die äußerst geringe Stärke des Drahtes sehen wir als konstant an und den Stoff des Drahtes als homogen.

Um den Punkt M_i herum trennen wir ein Drahtelement von der Länge Δl_i ab; das Gewicht dieses Elementes bezeichnen wir mit p_i. Da der Draht homogen ist, hat das Verhältnis von $p_i : \Delta l_i$ einen festen Wert für alle Elemente:

$$\frac{p_i}{\Delta l_i} = \varrho,$$

woraus

$$p_i = \varrho \cdot \Delta l_i$$

folgt.

[1] Wobei diese Abstände als positiv nach der einen Richtung der Achse bewertet werden und als negativ nach der anderen Richtung.

[2] Die Achse des Drahtes sei der geometrische Mittelpunkt der Querschnitte des Drahtes.

Das Gewicht des Drahtes ist gleich

$$P = \sum p_i = \sum \varrho \, \Delta l_i = \varrho \sum \Delta l_i = \varrho L,$$

wobei L die Länge des Drahtes ist. Wenn wir hier $L = 1$ annehmen, erhalten wir $P = \varrho$, folglich ist ϱ das Gewicht der Längeneinheit des Drahtes.

Die Koordinaten des Schwerpunktes C des Drahtes werden durch die Gleichungen

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P} = \frac{\Sigma \varrho x_i \Delta l_i}{\varrho L} = \frac{\varrho \Sigma x_i \Delta l_i}{\varrho L} = \frac{\Sigma x_i \Delta l_i}{L},$$

$$y_c = \frac{\Sigma y_i \Delta l_i}{L}, \qquad z_c = \frac{\Sigma z_i \Delta l_i}{L}$$

bestimmt. Hierin sind x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes M_i, die Summierungen sind über alle Elemente des Drahtes ausgedehnt.

Die Koordinaten des Schwerpunktes C hängen nicht von der Konstanten ϱ ab, die den Stoff des Drahtes charakterisiert. Deshalb kann man den Schwerpunkt des homogenen Drahtes Schwerpunkt der Linie L nennen.

Somit heißt der Schwerpunkt eines homogenen, äußerst dünnen Drahtes konstanter Stärke, dessen Achse mit der gegebenen Linie zusammenfällt, *Schwerpunkt der Linie.*

§ 71. Einige elementare Verfahren zur Bestimmung der Schwerpunkte und der statischen Momente

Die Summen $\Sigma p_i x_i$, $\Sigma x_i \Delta v_i$, $\Sigma x_i \Delta s_i$, $\Sigma x_i \Delta l_i$, usw., die in den Zählern der Gleichungen für die Koordinaten der Schwerpunkte des starren Körpers, des Volumens, der Fläche und der Linie auftreten, bestehen aus einer großen Anzahl kleiner Summanden. Die Regeln für die Berechnung solcher Summen werden im Lehrgang der Integralrechnung dargelegt. Hier führen wir einige einfache Überlegungen an, die manchmal die Berechnung der Koordinaten der Schwerpunkte (und ebenso der statischen Momente von ebenen Figuren) auf elementare Art erlauben.

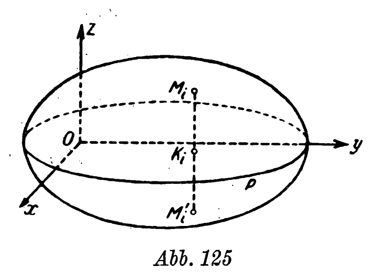


Abb. 125

Wir werden zeigen, daß der Schwerpunkt eines Volumens auf der Symmetrieebene liegt, wenn das gegebene Volumen eine Symmetrieebene besitzt. Nehmen wir an, die Ebene P sei die Symmetrieebene des gegebenen Volumens V (Abb. 125). Nehmen wir das Koordinatensystem x, y und z so an, daß die Achsen x und y in der Ebene P liegen und die z-Achse senkrecht zur P-Ebene steht. Wir berechnen die Koordinate z_c des Schwerpunktes C des Volumens V und erhalten:

$$z_c = \frac{\Sigma z_i \Delta v_i}{V},$$

wobei z_i die z-Koordinate eines Punktes M_i ist, der innerhalb des Volumens V liegt, und Δv_i das Volumenelement, das um den Punkt M_i herum herausgeschnitten ist. Da die Ebene P eine Symmetrieebene des Volumens V ist, erhalten wir, wenn wir das Lot M_iK_i vom Punkte M_i auf die Ebene P fällen und auf der Fortsetzung dieser Senkrechten $K_iM_i' = M_iK_i$ abtragen, den Punkt M_i', der ebenfalls innerhalb des Volumens V liegt. Wenn x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes M_i sind, werden x_i, y_i, $-z_i$ die Koordinaten des Punktes M_i sein. Nachdem wir das Volumenelement um den Punkt M_i herausgeschnitten haben, das dem um den Punkt M_i' herausgeschnittenen Volumenelement Δv_i gleich ist, stellen wir fest, daß in der Summe $\Sigma z_i \Delta v_i$ die Glieder, die den Punkten M_i und M_i' entsprechen, zahlenmäßig gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Genauso können alle Glieder der Summe $\Sigma z_i \Delta v_i$ in Gliederpaare zerlegt werden, die zahlenmäßig gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Hieraus folgt, daß

$$\Sigma z_i \Delta v_i = 0$$

ist und also auch $z_c = 0$. Folglich liegt der Schwerpunkt C auf der Symmetrieebene P.

Wir werden nun zeigen, daß der Schwerpunkt des Volumens auf der Symmetrieachse liegt, wenn das gegebene Volumen eine Symmetrieachse besitzt.

Nehmen wir an, die Achse AB sei die Symmetrieachse des gegebenen Volumens (Abb. 126). Wir wählen die Achsen x, y, z so, daß die z-Achse mit der Symmetrieachse AB zusammenfällt, und berechnen nun die Koordinaten x_c und y_c des Schwerpunktes C des Volumens V.

Abb. 126

Es gilt:

$$x_c = \frac{\Sigma x_i \Delta v_i}{V}, \qquad y_c = \frac{\Sigma y_i \Delta v_i}{V},$$

wobei x_i und y_i die Koordinaten des Punktes M_i sind, der innerhalb des Volumens V liegt, und Δv_i das Volumenelement ist, das um den Punkt M_i herausgeschnitten ist.

Da die z-Achse die Symmetrieachse des Volumens V ist, erhalten wir, wenn wir vom Punkte M_i das Lot $M_i K_i$ auf die z-Achse fällen und auf der Verlängerung dieses Lotes $K_i M_i' = M_i K_i$ abtragen, den Punkt M_i', der gleichfalls innerhalb des Volumen V liegt. Sind x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes M_i, so sind $-x_i$, $-y_i$, z_i die Koordinaten des Punktes M_i'. Schneiden wir um den Punkt M_i' das Volumenelement heraus, das dem um den Punkt M_i her ausgeschnittenen Volumenuelement Δv_i gleich ist, so stellen wir fest, daß in den Summen $\Sigma x_i \Delta v_i$ und $\Sigma y_i \Delta v_i$ die Glieder, die den Punkten M_i und M_i' entsprechen, zahlenmäßig gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. In der gleichen Weise können alle Glieder der Summen $\Sigma x_i \Delta v_i$ und $\Sigma y_i \Delta v_i$ paarweise in Glieder zerlegt werden, die der Größe nach gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Hieraus folgt, daß

$$\sum x_i \Delta v_i = 0, \qquad \sum y_i \Delta v_i = 0$$

sind und also auch $x_c = 0$, $y_c = 0$. Folglich liegt der Schwerpunkt C auf der Symmetrieachse z.

Durch die gleiche Überlegung können wir uns davon überzeugen, daß der Schwerpunkt der Fläche einer ebenen Figur oder der Schwerpunkt einer Linie auf der Symmetrieachse liegt, wenn die ebene Figur oder die Linie eine Symmetrieachse besitzen.

Manchmal gelingt es, die Lage des Schwerpunktes der Fläche einer ebenen Figur und ebenso ihre statischen Momente leicht zu bestimmen, wenn die gegebene Figur in Teile zerlegt werden kann, deren Schwerpunkte bekannt sind.

Nehmen wir an, es sei der Schwerpunkt C der Fläche der ebenen Figur S zu bestimmen, wobei diese Figur in drei Teile S_1, S_2, S_3 zerlegt ist, deren Schwerpunkte C_1, C_2, C_3 bekannt sind (Abb. 127).

Wir wählen die Koordinatenachsen x und y und bezeichnen die statischen Momente der ebenen Figur S bezüglich dieser Achsen mit M_x und M_y. Es gilt:

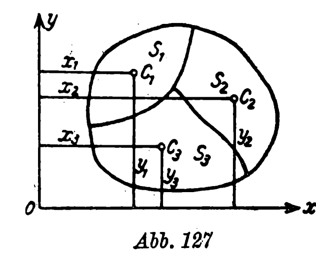


Abb. 127

$$x_c = \frac{M_y}{S},$$

$$y_c = \frac{M_x}{S},$$

wobei x_c und y_c die Koordinaten des gesuchten Schwerpunktes sind.

Wir bezeichnen die statischen Momente der Flächen S_1, S_2, S_3 bezüglich der Achsen x und y mit M'_x, M''_x, M'''_x, M'_y, M''_y, M'''_y.

Dann ist

$$M_x = M'_x + M''_x + M'''_x,$$

$$M_y = M'_y + M''_y + M'''_y.$$

Andererseits erhalten wir, wenn wir die Koordinaten der Punkte C_1, C_2, C_3 mit (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) bezeichnen:

$$M'_x = S_1 y_1, \qquad M''_x = S_2 y_2, \qquad M'''_x = S_3 y_3,$$

$$M'_y = S_1 x_1, \qquad M''_y = S_2 x_2, \qquad M'''_y = S_3 x_3,$$

Folglich ist

$$M_x = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3,$$

$$M_y = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3.$$

Auf diese Weise werden die statischen Momente der gegebenen Figur bestimmt. Die Koordinaten x_c und y_c finden wir aus den Gleichungen

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S},$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S}.$$

Wir erläutern das Gesagte an Beispielen.

Beispiel 23. Es ist das statische Moment eines z-förmigen Schnittes bezüglich der Achse ab zu bestimmen (Abb. 128). Die Maße sind in der Abbildung angegeben.

Wenn wir die gegebene Figur in drei Rechtecke zerlegen, erhalten wir:

$$M_{ab} = 6{,}3 \times 11{,}475 + 6{,}93 \times 6 + 6{,}3 \times 0{,}525 = 117{,}18 \text{ cm}^3.$$

Beispiel 24. Es ist der Schwerpunkt eines kleinen Winkels zu bestimmen (Abb. 129), dessen Maße in der Abbildung angegeben sind.

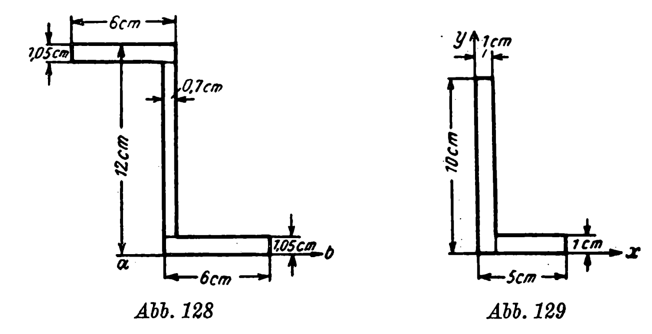


Abb. 128 *Abb. 129*

Wir wählen die Achsen x und y, wie es in der Abbildung gezeigt ist. Zerlegen wir den kleinen Winkel in zwei Rechtecke (Abb. 129) so erhalten wir:

$$x_c = \frac{10 \times 0{,}5 + 4 \times 3}{10 + 4} = \frac{17}{14} = 1{,}21 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{10 \times 5 + 4 \times 0{,}5}{10 + 4} = \frac{52}{14} = 3{,}71 \text{ cm}.$$

Dasselbe Verfahren kann man auch bei der Bestimmung der Schwerpunkte von Volumen und Linien anwenden.

§ 72. Die erste GULDINsche Regel

In einigen Fällen erweist es sich als möglich, den Schwerpunkt von Flächen und Linien auf Grund zweier Theoreme sehr einfach zu bestimmen, die gewöhnlich GULDINsche Regeln[1] genannt werden. Im vorliegenden Paragraphen werden wir das erste dieser Theoreme beweisen.

Stellen wir uns eine ebene Figur vor, die von der geschlossenen Kontur AB begrenzt sei (Abb. 130) und deren Fläche wir mit S bezeichnen. Wählen wir auf der Figurenfläche irgendeine Achse z, die die Kontur AB nicht schneidet, und drehen die Kontur AB um die Achse. Bei der Drehung um die z-Achse beschreibt die

[1] Das Werk Guldins „De centro gravitatis" (Vom Schwerpunkt) erschien im Jahre 1635. Jedoch waren diese Theoreme bereits im 3. Jahrhundert von Pappos von Alexandrien ausgesprochen, deshalb ist es richtiger, sie als Regeln des Pappos zu bezeichnen (wie es auch manchmal geschieht).

Kurve AB irgendeine geschlossene Fläche, die *Drehfläche* heißt. Der von dieser geschlossenen Fläche begrenzte Körper heißt *Drehkörper*. Errechnen wir den Rauminhalt V dieses Körpers.

Zu diesem Zweck zerteilen wir die gesamte Fläche S in eine sehr große Anzahl unendlich kleiner (oder elementarer) Flächen Δs_i. Bei der Drehung unserer Figur um die z-Achse beschreibt jede kleine Fläche Δs_i einen elementaren Kreisring, dessen Radius gleich dem Abstand der kleinen Fläche von der z-Achse ist. Wir bezeichnen diesen Abstand mit x_i. Das unbekannte Volumen V ist gleich der Summe der Volumina aller Ringelemente, die von allen kleinen Flächenelementen Δs_i beschrieben werden. Das Volumen eines Ringelementes, das von der kleinen Fläche Δs_i beschrieben wird, ist gleich $2\pi x_i \Delta s_i$. Hieraus schließen wir, daß

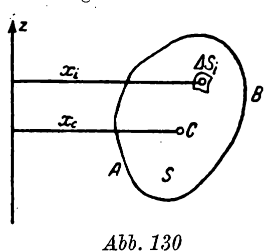


Abb. 130

$$V = \sum 2\pi x_i \Delta s_i = 2\pi \sum x_i \Delta s_i$$

ist, wobei die Summierung über alle Flächenelemente erfolgt, in die die gegebene Fläche S zerteilt ist. Wir suchen den Schwerpunkt C der Fläche S und bezeichnen seinen Abstand von der z-Achse mit x_c. Auf Grund des in § 70 Dargelegten wissen wir, daß

$$x_c = \frac{\Sigma x_i \Delta s_i}{S}$$

ist, woraus

$$\sum x_i \Delta s_i = x_c \cdot S$$

folgt.

Somit erhalten wir endgültig:

$$V = 2\pi x_c \cdot S,$$

d. h., *das Volumen des Drehkörpers, der durch die Fläche S umschrieben wird, ist gleich dem Produkt aus dieser Fläche und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Fläche beschreibt.*

Dies ist die erste GULDINsche Regel.

Diese Regel erlaubt das Volumen V zu bestimmen, wenn die Lage des Schwerpunktes der Fläche S bekannt ist. Umgekehrt gelingt auf Grund dieser Regel in manchen Fällen sehr einfach die Ermittlung des Schwerpunktes der Fläche S, wenn das Volumen des Drehkörpers bekannt ist, der durch diese Fläche umschrieben wird.

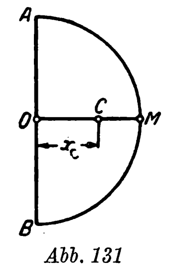


Abb. 131

Wir betrachten das folgende Beispiel.

Gegeben sei die Fläche S, die von dem Bogen des Halbkreises AMB und dem Durchmesser AB begrenzt ist (Abb. 131). Der Schwerpunkt dieser Fläche soll bestimmt werden.

Da der Radius OM, der senkrecht zum Durchmesser AB steht, Symmetrieachse der gegebenen Fläche ist, liegt der gesuchte Schwerpunkt C auf diesem Radius. Wir wollen seinen Abstand x_c vom Durchmesser AB ermitteln. Wir stellen uns vor,

daß sich die Fläche S um den Durchmesser AB dreht. Bei dieser Rotation umschreibt der Kreisbogen AMB die Fläche einer Kugel. Wenn wir das Volumen dieser Kugel mit V und den Radius des Kreisbogens AMB mit R bezeichnen, erhalten wir:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Andererseits ist die Fläche S unserer Figur gleich der Hälfte der Kreisfläche vom Radius R, d. h.

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Auf Grund der GULDINschen Regel erhalten wir:

$$x_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0{,}4244\, R.$$

Damit ist die Lage des Schwerpunktes C genau ermittelt.

§ 73. Die zweite GULDINsche Regel

Manchmal gelingt es, den Schwerpunkt einer krummen Linie nach einer Methode zu ermitteln, die der im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen analog ist.

Gegeben sei der Kreisbogen AB einer ebenen Kurve, dessen Länge wir mit L bezeichnen (Abb. 132). Wir wählen die z-Achse, die in der Ebene dieser Kurve liegt und den Kreisbogen AB nicht schneidet. Drehen wir den Kreisbogen AB um die z-Achse, so erhalten wir irgendeine Drehfläche. Wir bestimmen die Oberfläche S dieser Drehfläche.

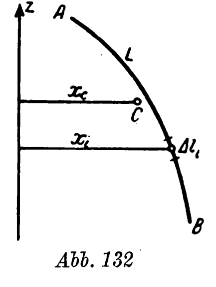


Abb. 132

Zerlegen wir die Kurve AB in unendlich kleine Elemente Δl_i. Bei der Drehung der Kurve AB um die z-Achse beschreiben alle diese Elemente unserer Kurve ringförmige Oberflächenelemente. Die Summe dieser Flächenelemente ist gleich der unbekannten Fläche S.

Betrachten wir das Element Δl_i — in Anbetracht seiner Kleinheit — als geraden Abschnitt, so können wir die durch dieses Element umschriebene ringförmige Fläche als Fläche eines abgeschnittenen Kegels von unendlich kleiner Höhe behandeln. Hieraus folgt, daß die Fläche dieser ringförmigen Fläche gleich $2\pi x_i \Delta l_i$ ist, wobei x_i der Abstand des Elementes Δl_i von der z-Achse ist.

Folglich ist

$$S = \sum 2\pi x_i \Delta l_i = 2\pi \sum x_i \Delta l_i,$$

wobei die Summierung sich über alle Elemente Δl_i erstreckt. Andererseits erhalten wir, wenn wir den Abstand des Schwerpunktes C der Kurve AB von der z-Achse mit x_c bezeichnen:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

woraus

$$\sum x_i \Delta l_i = x_c L$$

folgt.

Endgültig erhalten wir:

$$S = 2\pi x_c L,$$

d. h., *die Oberfläche der Drehfläche, die von der Kurve AB beschrieben wird, ist gleich dem Produkt aus der Länge dieser Kurve und dem Umfang des Kreises, der von dem Schwerpunkt der Kurve beschrieben wird.* Dies ist die zweite GULDINsche Regel.

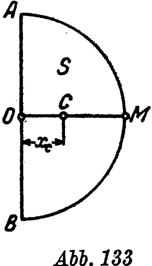


Abb. 133

Die Anwendung dieser Regel erklären wir an folgendem Beispiel:

Es ist die Lage des Schwerpunktes des Halbkreisbogens AMB zu bestimmen (Abb. 133).

Da der Radius OM, der senkrecht zum Durchmesser AB steht, die Symmetrieachse des Halbkreisbogens AMB ist, liegt der gesuchte Schwerpunkt C auf diesem Radius. Drehen wir den Halbkreis AMB um den Durchmesser AB, so erhalten wir eine Sphäre. Wir bezeichnen die Oberfläche dieser Kugel mit S und den Radius des Halbkreisbogens AMB mit R. Es gilt

$$S = 4\pi R^2.$$

Andererseits ist die Länge des Halbkreisbogens AMB gleich

$$L = \pi \cdot R.$$

Dem Bewiesenen nach gilt:

$$x_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2}{\pi} R \approx 0{,}6366\, R,$$

wobei x_c der Abstand des gesuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Kreisbogens ist.

§ 74. Die Schwerpunkte einiger einfacher geometrischer Figuren

In diesem Paragraphen werden wir uns mit der Bestimmung der Schwerpunkte einiger einfacher geometrischer Figuren beschäftigen, die oft Verwendung finden.

Bei diesen Beispielen werden wir Gelegenheit haben, noch einige einfache Verfahren kennen zu lernen, die bei der Ermittlung von Schwerpunkten Anwendung finden.

1. Der Schwerpunkt einer Dreieckfläche

Es sei der Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks ABC zu ermitteln (Abb. 134).

Wir zerlegen die Fläche eines Dreiecks durch Geraden, die parallel zur Basis AB verlaufen, in Streifen unendlich kleiner Breite. Die Schwerpunkte der Flächen all dieser Streifen liegen auf der Mittellinie CM, die von dem Scheitelpunkt C nach der Mitte der Seite AB gezogen ist. Hieraus schließen wir, daß auch der Schwerpunkt der Fläche des gesamten Dreiecks auf dieser Mittellinie liegt.

Genauso können wir uns davon überzeugen, daß der Schwerpunkt der Fläche unseres Dreiecks auch auf den zwei anderen Mittellinien liegen muß, die von den Scheitelpunkten A und B nach den Mitten der ihnen gegenüber liegenden Seiten geführt sind. Folglich liegt der unbekannte Schwerpunkt im Schnittpunkt aller drei Mittellinien des Dreiecks.

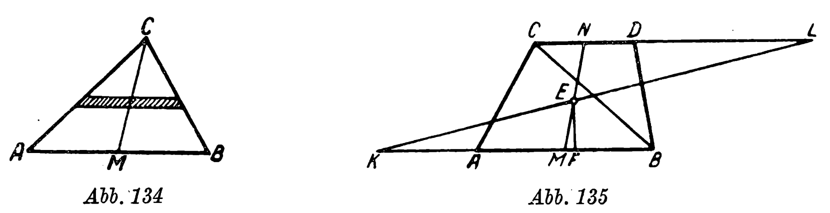


Abb. 134 Abb. 135

Hieraus folgt unter anderem, daß der Abstand des Schwerpunktes von der Basis des Dreiecks gleich einem Drittel der Höhe ist.

2. Der Schwerpunkt einer Trapezfläche

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ (Abb. 135). Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $AB = a$, $CD = b$, die Höhe des Trapezes ist h. Es ist der Schwerpunkt der Trapezfläche zu ermitteln.

Unterteilen wir die Fläche des Trapezes in Streifen unendlich kleiner Breite durch den Grundlinien des Trapezes parallele Geraden, so überzeugen wir uns leicht davon, daß der unbekannte Schwerpunkt auf der Geraden MN liegt, welche die Mitten der Grundseiten AB und CD verbindet. Wir berechnen seinen Abstand y_c von der Grundseite AB. Zu diesem Zwecke teilen wir unser Trapez durch die Gerade BC in zwei Dreiecke ABC und BCD. Wenn wir ihre Flächen mit S_1 und S_2 und die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Geraden AB mit y_1 und y_2 bezeichnen, erhalten wir

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}.$$

Substituieren wir hier

$$S_1 = \frac{a h}{2}, \qquad S_2 = \frac{b h}{2},$$

$$y_1 = \frac{h}{3}, \qquad y_2 = \frac{2 h}{3},$$

so erhalten wir:

$$y_c = \frac{\dfrac{a h^2}{6} + \dfrac{2 b h^2}{6}}{\dfrac{a h}{2} + \dfrac{b h}{2}} = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}.$$

Somit ist der unbekannte Schwerpunkt der Punkt, der auf der Geraden MN in dem soeben berechneten Abstand y_c von der Geraden AB liegt. Diesen Punkt kann man auf folgende Weise konstruieren.

Wir tragen $AK = b$, $DL = a$ ab und ziehen die Gerade KL (Abb. 135). Diese Gerade schneidet die Gerade MN im Punkte E. Wir werden zeigen, daß der Punkt E der unbekannte Schwerpunkt ist.

Fällen wir vom Punkte E das Lot EF auf die Gerade AB, so gilt:

$$\frac{EF}{h} = \frac{EM}{MN}.$$

Hieraus folgt

$$EF = h \frac{EM}{MN}.$$

Andererseits folgern wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KEM und ENL:

$$\frac{EM}{EN} = \frac{KM}{NL} = \frac{\dfrac{a}{2} + b}{a + \dfrac{b}{2}} = \frac{a + 2b}{2a + b},$$

oder, da $EN = MN - EM$ ist,

$$\frac{EM}{MN - EM} = \frac{a + 2b}{2a + b},$$

woraus

$$EM = MN \cdot \frac{a + 2b}{3(a + b)}$$

folgt.

Wird dieser Wert der Strecke EM in die Gleichung der Strecke EF eingesetzt, so erhalten wir:

$$EF = \frac{h\,(a + 2b)}{3\,(a + b)} = y_c.$$

Somit ist der Punkt E der Schwerpunkt der Fläche unseres Trapezes.

3. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens

Gegeben sei der Kreisbogen AB vom Radius R (Abb. 136). Es ist der Schwerpunkt dieses Bogens zu ermitteln. Da der Radius OM, der durch die Mitte des Kreisbogens geht, als Symmetrieachse des Kreisbogens AB erscheint, liegt der unbekannte Schwerpunkt C auf diesem Radius. Wir berechnen seinen Abstand OC von der Mitte des Bogens O.

Wir zerlegen den Kreisbogen AB in eine sehr große Anzahl unendlich kleiner Elemente Δl_i, von denen eines schematisch in der Abbildung dargestellt ist, lassen die x-Achse auf dem mittleren Radius OM verlaufen und wählen den Mittelpunkt O als Koordinatenursprung. Bezeichnen wir die Abszisse der Mitte des Elementes Δl_i mit x_i und setzen $OC = x_c$, so erhalten wir

$$x_c = \frac{\Sigma x_i \Delta l_i}{L},$$

wobei L die Länge des Bogens AB ist und die Summierung über alle Elemente Δl_i ausgedehnt wird.

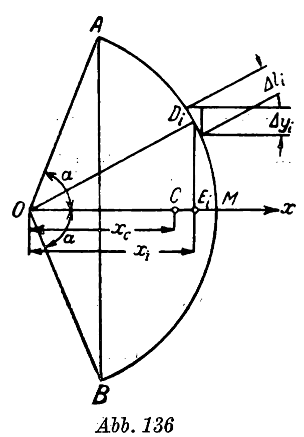


Abb. 136

Die im Zähler dieser Formel stehende Summe berechnen wir folgendermaßen: Wir bezeichnen die Mitte des Elementes Δl_i mit D_i und den Fußpunkt des Lotes, das von diesem Punkte aus auf die x-Achse gefällt ist, mit E_i. In diesem Falle ist $OE_i = x_i$. Legen wir weiterhin durch die Endpunkte des Elementes Δl_i zwei Geraden, die der Sehne AB parallel bzw. senkrecht zu ihr sind, so erhalten wir bei dem Element Δl_i ein unendlich kleines Dreieck (die Seite Δl_i in diesem Dreieck kann man in Anbetracht ihrer Kleinheit als geradlinig ansehen), das dem Dreieck OD_iE_i ähnlich ist (da die Seiten aufeinander senkrecht stehen). Bezeichnen wir die Seite des unendlich kleinen Dreiecks, die parallel der Sehne AB ist, mit Δy_i, so können wir aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgern:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta l_i} = \frac{O E_i}{O D_i} = \frac{x_i}{R}.$$

Hieraus erhalten wir

$$x_i \Delta l_i = R \Delta y_i,$$

und folglich ist

$$x_c = \frac{\Sigma R \Delta y_i}{L} = \frac{R}{L} \sum \Delta y_i.$$

Die Summe aller Abschnitte Δy_i ist jedoch gleich der Sehne AB.

Wenn wir die Länge dieser Sehne mit S bezeichnen, erhalten wir:

$$x_c = R \frac{S}{L}.$$

Hierdurch wird die Lage des Schwerpunktes C bestimmt.

Das gewonnene Ergebnis kann man ein wenig anders darstellen, wenn man den Zentriwinkel $\sphericalangle\, AOB = 2\alpha$ einführt. Es gilt

$$L = 2\,R\,\alpha\,,$$

$$S = 2\,R\sin\alpha\,.$$

Folglich ist

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Wir wenden diese Formel zur Ermittlung des Schwerpunktes eines Halbkreisbogens an. In diesem Falle haben wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$, und folglich ist

$$x_c = \frac{2}{\pi}R\,,$$

was mit dem Ergebnis, das wir in § 73 erhielten, übereinstimmt.

4. Der Schwerpunkt eines Kreissektors

Gegeben sei ein Kreissektor, der von dem Kreisbogen AB und den Radien OA und OB begrenzt ist (Abb. 137). Den Radius des Bogens AB bezeichnen wir mit R. Es ist der Schwerpunkt der Fläche dieses Sektors zu ermitteln.

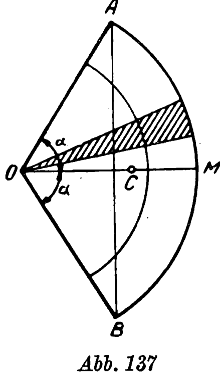


Abb. 137

Indem wir unendlich viele benachbarte Radien ziehen, unterteilen wir den gegebenen Sektor in eine unendliche Anzahl von Sektorelementen, von denen eines schematisch in der Abbildung dargestellt ist. Jedes dieser Sektorelemente kann man als dreieckiges Flächenelement ansehen (den Kreisbogen, der einem solchen Sektor als Grundlinie dient, kann man in Anbetracht seiner Kleinheit als geradlinigen Abschnitt annehmen). Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt der Fläche eines jeden Sektorelements sich in einem Abstand $\frac{2}{3}R$ vom Mittelpunkt O befindet. Wir folgern, daß der gesuchte Schwerpunkt der Fläche des gesamten gegebenen Sektors mit dem Schwerpunkt des Bogens der Kreislinie vom Radius $\frac{2}{3}R$ zusammenfällt.

Somit befindet sich der Schwerpunkt der Sektorfläche auf dem mittleren Radius OM im Abstand

$$OC = \frac{2}{3}R\frac{S}{L} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

vom Mittelpunkt O. Hier sind S die Länge der Geraden AB, L die Länge des Kreisbogens AB und 2α der Zentriwinkel $\sphericalangle\, AOB$.

Im Falle eines Halbkreises erhalten wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Setzen wir diesen Wert in die erhaltene Formel ein, so ergibt sich

$$OC = \frac{4}{3\pi} R,$$

was mit dem in § 72 gewonnenen Resultat übereinstimmt.

5. Der Schwerpunkt eines Kreissegments

Gegeben sei ein Kreissegment, das von dem Bogen des Halbkreises AMB und der Sehne AB begrenzt ist (Abb. 138). Den Radius des Bogens AMB bezeichnen wir mit R. Es ist der Schwerpunkt der Segmentfläche zu ermitteln.

Ziehen wir die Radien OA und OB, so erhalten wir den Kreissektor OAB. Durch die Sehne AB wird dieser Sektor in zwei Teile zerlegt: in das gegebene Segment und das Dreieck OAB. Die Schwerpunkte des Segments (C), des Dreiecks (C_1) und des Sektors (C_2) liegen auf dem Radius OM, der senkrecht zur Sehne AB steht. Bezeichnen wir die Abstände dieser Schwerpunkte vom Zentrum O mit x, x_1 und x_2, so erhalten wir:

$$x_2 = \frac{Sx + S_1 x_1}{S_2},$$

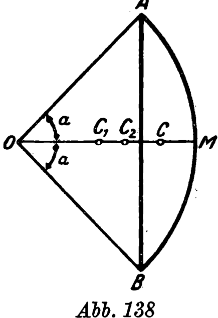


Abb. 138

wobei S die Fläche des Segments, S_1 die Fläche des Dreiecks OAB und S_2 die Fläche des Sektors ist. Hieraus folgt

$$x = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{S} = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{S_2 - S_1}.$$

Ersetzen wir hierin

$$S_1 = R^2 \sin\alpha \cos\alpha, \qquad x_1 = \frac{2}{3} R \cos\alpha,$$

$$S_2 = R^2 \alpha, \qquad x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

wobei $2\alpha = \sphericalangle\, AOB$ ist, so erhalten wir:

$$x = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin\alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha \cos\alpha^2}{R^2\alpha - R^2 \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Mit dieser Formel ist die Lage des Schwerpunktes der Segmentfläche bestimmt.

§ 75. Die Anwendung des Seilecks zur Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen

Die Schwerpunkte der Flächen können auch graphisch durch eine Seileckkonstruktion bestimmt werden. Wir wollen dieses Verfahren an folgendem Beispiel erläutern.

Angenommen, es wird die Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche S gefordert, die in Abb. 139 dargestellt ist. Die Fläche S kann in die drei Teile (Rechtecke) S_1, S_2 und S_3 zerlegt werden, deren Schwerpunkte bekannt sind.

Wir legen an den Schwerpunkten C_1, C_2 und C_3 dieser Flächen die senkrechten Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ an, die proportional den Flächen S_1, S_2 und S_3 sind. Die Aufgabe ist damit auf die Ermittlung des Zentrums dieser drei Parallelkräfte zurückgeführt.

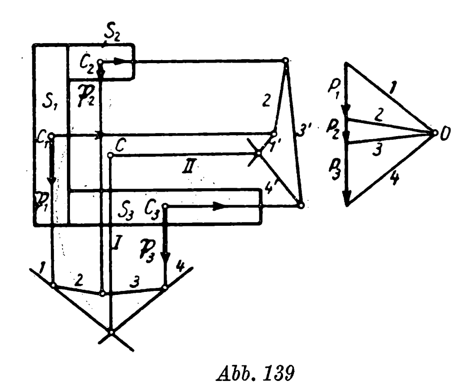


Abb. 139

Wir wissen, daß das Zentrum der Parallelkräfte auf der Wirkungslinie der Resultierenden der gegebenen Kräfte liegt. Wir ermitteln die Wirkungslinie der Resultierenden der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ mit Hilfe eines Seilecks. Zu diesem Zweck konstruieren wir das Kräftevieleck $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ mit den Strahlen *1*, *2*, *3* und *4* und das Seileck *1*, *2*, *3* und *4*. Die senkrechte Gerade I, die durch den Schnittpunkt der äußersten Seiten verläuft, ist die Wirkungslinie der Resultierenden.

Wir benutzen jetzt die Eigenschaft des Zentrums der Parallelkräfte, daß es seine Lage bei der Drehung aller Kräfte um ihre Angriffspunkte um einen festen Winkel nicht ändert. Wir drehen die Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ in den Punkten C_1, C_2 und C_3 um 90° und errichten erneut eine Wirkungslinie der Resultierenden dieser Kräfte.

Es ist offensichtlich, daß der Schnittpunkt dieser Geraden mit der früher errichteten Geraden I das gesuchte Zentrum der Parallelkräfte ist. Man sieht leicht ein, daß keine Notwendigkeit besteht, ein neues Vieleck der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ zu konstruieren (das ihrer gedrehten Lage entspricht). Man kann sofort ein Seileck *1'*, *2'*, *3'*, *4'* konstruieren, indem man seine Seiten nicht parallel, sondern senkrecht zu den entsprechenden Strahlen *1*, *2*, *3*, *4* des bereits konstruierten Kräftevielecks zieht. Die waagerechte Gerade II, die durch den Schnittpunkt der äußersten Seiten *1'* und *4'* des neuen Seilecks verläuft, ist die Wirkungslinie der Resultierenden der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ in ihrer gedrehten Lage. Der unbekannte Schwerpunkt C der gegebenen Fläche befindet sich im Schnittpunkt der Geraden I und II.

Zweiter Teil

DIE KINEMATIK

KAPITEL XII

DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN EINES PUNKTES

§ 76. Kinematik. Dynamik

Im ersten Teil dieses Lehrbuches studierten wir die Bedingungen, unter denen ein Körper, der sich unter der Einwirkung von an ihm angreifenden Kräften befindet, im Gleichgewicht verbleibt, und betrachteten dabei speziell den starren Körper. Wenn die an dem Körper angreifenden Kräfte den Gleichgewichtsbedingungen nicht entsprechen, verändert sich die Bewegung des Körpers. Die in der Mechanik beim Studium der Bewegung der Körper zu stellende Grundfrage ist folgende: Wie wird sich der gegebene Körper unter der Einwirkung der an ihm angreifenden Kräfte bewegen, und wie ist der Zusammenhang zwischen den an dem Körper angreifenden Kräften und der durch diese hervorgerufenen Bewegung.

Man kann jedoch an das Studium der Bewegung auch von einem anderen Gesichtspunkt herangehen. Bewegung des Körpers heißt die von der Zeit abhängige Veränderung seiner Lage im Raum. Durch die geometrischen Eigenschaften des Raumes werden auch die geometrischen Eigenschaften der Bewegung bedingt, die in diesem Raume stattfindet. Läßt man zeitweilig die Frage nach den die Bewegung der Körper verändernden Kräften außer Acht, so kann man seine Aufmerksamkeit auf das Studium dieser geometrischen Eigenschaften der Bewegung konzentrieren. Gerade von diesem Gesichtspunkt aus wird die Körperbewegung in der *Kinematik* studiert.

Die Kinematik kann man die geometrische Lehre von der Bewegung nennen. Wie bereits gesagt, bleibt in der Kinematik die Frage nach den die Körperbewegung bewirkenden Kräften gänzlich unberührt. Die Untersuchungen der Bewegung der Körper, in denen der Zusammenhang zwischen der Bewegung des Körpers und den an ihm angreifenden Kräften an die erste Stelle gerückt wird, gehört zu den Aufgaben der Dynamik. Es ist verständlich, daß durch das Studium der Bewegung vom kinematischen Gesichtspunkt aus eine breitere dynamische Untersuchung der Frage vorbereitet und erleichtert werden kann. Hieraus folgt, daß ein Studium der Kinematik dem Studium der Dynamik vorausgehen muß.

In diesem zweiten Teil sollen die Grundlagen der Kinematik dargelegt werden. Ebenso wie wir uns in der Statik nur mit dem Studium der Gleichgewichtsbedingungen der absolut starren Körper beschäftigt haben, beschränken wir unsere Betrachtungen

hier auf das Studium der Kinematik eines starren Körpers. Die Darlegung der Kinematik veränderlicher Körper (z. B. von Flüssigkeiten) gehört in die entsprechenden speziellen Lehrbücher.

Wie wir schon feststellten, kann man die Kinematik als Einführung in die Dynamik behandeln. Man darf jedoch nicht vergessen, daß die in der Kinematik aufgestellten Ergebnisse auch große selbständige Bedeutung besitzen. In vielen Mechanismen hat die Frage nach den wirkenden Kräften eine verhältnismäßig zweitrangige Bedeutung, das richtige Funktionieren eines Mechanismus wird jedoch durch die erschöpfende kinematische Analyse der Bewegung seiner Einzelteile gesichert.

Die Anwendung der Ergebnisse der Kinematik beim Studium der Bewegung der Mechanismen wird in Lehrbüchern der Kinematik der Mechanismen dargelegt. In unserer Darlegung werden wir die sich hierauf beziehenden Fragen nur in allgemeinen Zügen berühren.

Wir beginnen das Studium der Kinematik mit der Betrachtung der Bewegung des einfachsten geometrischen Elementes, eines geometrischen Punktes.

§ 77. Bewegungsbahn. Bewegungsgleichung

Wir stellen uns einen geometrischen Punkt vor, der sich im Raume bewegt. Der sich bewegende Punkt beschreibt im Raume irgendeine Linie, die *Bewegungsbahn des Punktes* genannt wird. Im Sonderfall kann die Bewegungsbahn des Punktes eine gerade Linie sein und wird dann *geradlinig* genannt. Ist die Bewegungsbahn des Punktes eine krumme Linie, dann heißt die Punktbewegung *krummlinig*.

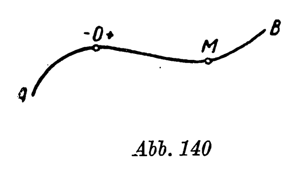


Abb. 140

Nehmen wir an, der Punkt M vollziehe irgendeine Bewegung auf der Bewegungsbahn AB (Abb. 140). Die Bewegung des Punktes M wird von uns völlig bestimmt sein, wenn wir imstande sind, die Lage des Punktes auf seiner Bewegungsbahn in jedem gegebenen Augenblick anzugeben.

Wir wählen irgendeinen beliebigen Zeitpunkt als Anfang der Zeitzählung. Den Zeitraum (ausgedrückt in Stunden, Minuten, Sekunden usw.), der von dem gewählten Anfang bis zu einem gegebenen Augenblick abgelaufen ist, bezeichnen wir mit dem Buchstaben t und nennen ihn die *Zeit* t. Den Zeitpunkt $t = 0$, von dem aus wir die Zeit rechnen, werden wir *Anfangszeitpunkt* nennen.

Die Lage des Punktes M auf seiner Bewegungsbahn kann auf folgende Weise bestimmt werden:

Wir betrachten auf der Bewegungsbahn irgendeinen beliebigen festen Punkt O. Wir messen die Bogenlänge OM und vereinbaren, dieser Linie das Pluszeichen zuzuschreiben, wenn sich der Punkt M auf der Bewegungsbahn in der einen Richtung von dem Punkt O aus befindet, und das Minuszeichen, wenn sich der Punkt M in der entgegengesetzten Richtung von dem Punkte O aus befindet. (In welcher Richtung wir die Bogenlänge OM als positiv rechnen wollen, hängt von unserem Belieben ab). Die Länge des Bogens OM, ausgedrückt in Zentimetern, Metern, Kilometern usw. mit

dem entsprechenden Vorzeichen bezeichnen wir mit dem Buchstaben s und nennen sie den *Abstand des Punktes M vom Punkte O*, der als Anfang der Abzählung des Abstandes gilt. Mit der Angabe des Abstandes s läßt sich die Lage des Punktes auf seiner Bewegungsbahn bestimmen. Wenn die Lage des Punktes M zur Zeit $t = 0$ als Ausgangspunkt gewählt wird, von dem aus der Weg auf der Bewegungsbahn gezählt wird, bestimmt der Abstand s den Weg, den der Punkt M im Zeitraum t zurückgelegt hat. Bei der Bewegung des Punktes verändert sich der Abstand s im Laufe der Zeit. Folglich ist s eine Funktion von t:

$$s = f(t).$$

Diese Gleichung heißt *Bewegungsgleichung eines Punktes*. Mit der Ermittlung der Bewegungsbahn aus der Bewegungsgleichung ist die Bewegung des Punktes völlig bestimmt. Wenn wir die Bewegungsgleichung kennen, können wir tatsächlich für jede gegebene Zeit t den entsprechenden Weg s ermitteln und folglich auch die Lage des Punktes auf seiner Bewegungsbahn angeben.

§ 78. Bewegungsgleichung in rechtwinkligen Koordinaten

Man kann die Bewegung eines Punktes noch auf andere Weise bestimmen.

Nehmen wir an, daß der Punkt M irgendeine Bewegung im Raume vollführe (Abb. 141). Wir wählen die drei zueinander senkrechten Koordinatenachsen x, y und z. Die Lage des Punktes M ist durch seine drei Koordinaten x, y und z eindeutig bestimmt.

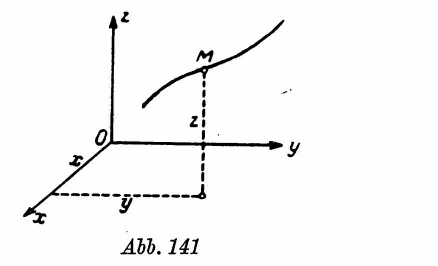


Abb. 141

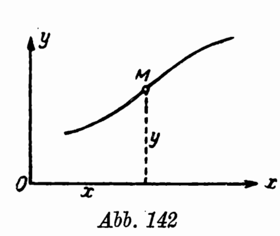


Abb. 142

Bei der Bewegung des Punktes M verändern sich seine Koordinaten x, y und z im Laufe der Zeit. Folglich sind die Koordinaten x, y und z Funktionen der Zeit t:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich die Bewegung des Punktes eindeutig bestimmen. Wenn wir diese Gleichungen kennen, können wir tatsächlich für jede

gegebene Zeit t die entsprechenden Koordinaten x, y und z ermitteln und folglich auch die Lage des Punktes im Raume angeben.

Die Gleichungen (1) heißen *Bewegungsgleichungen eines Punktes in rechtwinkligen Koordinaten.*

Bei den Anwendungen haben wir es gewöhnlich mit der Bewegung eines Punktes in einer Ebene zu tun, d. h. mit einer *ebenen Bewegung*. Betrachten wir diesen Fall. Nehmen wir an, daß sich der Punkt M in einer Ebene bewege, die wir als Abbildungsebene (Abb. 142) betrachten. Wir wählen in dieser Ebene die zueinander senkrechten Koordinatenachsen x und y. Die Lage des Punktes M in der Ebene ist durch seine beiden Koordinaten x und y eindeutig bestimmt. Bei der Bewegung des Punktes M sind seine Koordinaten x und y Funktionen der Zeit t:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t). \tag{2}$$

Dies sind also die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten im Sonderfall einer ebenen Bewegung des Punktes.

Nehmen wir an, daß uns die Bewegungsgleichungen (2) gegeben seien. Wir wollen die Gleichung der Bewegungsbahn des Punktes M ermitteln und eliminieren deshalb die Zeit t aus den Bewegungsgleichungen (2). Dazu lösen wir z. B. die erste Gleichung nach t auf und erhalten

$$t = \psi(x).$$

Wir setzen den für t erhaltenen Ausdruck in die zweite Gleichung ein:

$$y = f_2[\psi(x)]. \tag{3}$$

Dies ist eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y, die die Koordinaten des Punktes M zu jeder Zeit t befriedigen. Mit anderen Worten: Die Gleichung (3) wird von den Koordinaten aller Punkte der Bewegungsbahn befriedigt, d. h., Gleichung (3) ist die Gleichung der Bewegungsbahn.

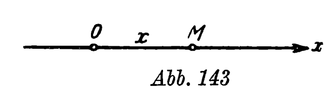


Abb. 143

Somit muß man, um die Gleichung der Bewegungsbahn des Punktes M zu ermitteln, die Zeit t aus den Bewegungsgleichungen (2) eliminieren.

Nach der Elimination der Zeit t aus den Gleichungen (2) hat die erhaltene Gleichung zwischen den Koordinaten x und y folgende Form:

$$F(x, y) = 0.$$

Verweilen wir noch bei dem Sonderfall der *geradlinigen Bewegung.*

Wir wählen die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse (Abb. 143) und auf dieser Achse den Koordinatenursprung O. Die Lage des Punktes M auf seiner geradlinigen Bewegungsbahn wird eindeutig durch die Koordinate $OM = x$ bestimmt, und die Bewegung des Punktes M ist eindeutig durch die Bewegungsgleichung

$$x = f(t)$$

bestimmt.

Wir bemerken, daß im gegebenen Fall die Koordinate x gleichzeitig auch als der zurückgelegte Weg erscheint (wenn der Punkt O als Ausgangspunkt genommen wird).

Beispiel 25. Wir stellen uns einen Stab AB vor (Abb. 144), dessen Enden auf zwei zueinander senkrechten Geraden $x'x$ und $y'y$ gleiten. Der Stab bewegt sich so, daß sich der Winkel $BAO = \varphi$ proportional mit der Zeit verändert:

$$\varphi = \omega t,$$

wobei ω eine konstante Zahl ist. Es ist die Bewegungsgleichung des Punktes M, der auf dem Stab AB liegt, aufzustellen und seine Bewegungsbahn zu bestimmen.

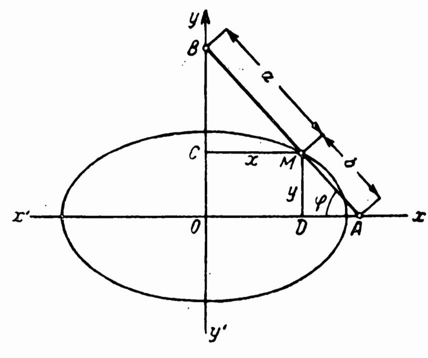


Abb. 144

Wir bezeichnen $BM = a$, $AM = b$ und wählen die Geraden $x'x$ und $y'y$ als Koordinatenachsen. Aus den Dreiecken BMC und AMD lesen wir ab:

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi,$$

oder, indem $\varphi = \omega t$ gesetzt wird:

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t.$$

Das sind die Gleichungen der Bewegung des Punktes M. Um die Bewegungsbahn zu bestimmen, eliminieren wir die Zeit t aus diesen Gleichungen. Wir erhalten dann

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \qquad \frac{y}{b} = \sin \omega t,$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t, \qquad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t,$$

woraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt.

Das ist die Gleichung einer Ellipse. Folglich ist die Bewegungsbahn des Punktes M eine Ellipse.

Somit beschreibt jeder Punkt des Stabes AB eine Ellipse. Der betrachtete Mechanismus kann zum Zeichnen von Ellipsen dienen und wird *Ellipsograph* genannt.

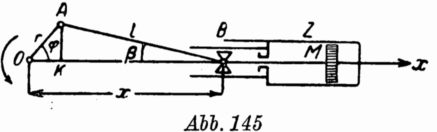


Abb. 145

Beispiel 26. Im Zylinder Z einer Dampfmaschine (Abb. 145) bewege sich der Kolben M, der durch die Kolbenstange BM mit dem Kreuzkopf B verbunden ist. Der Kreuzkopf ist seinerseits durch die Schubstange AB mit dem Ende A der Kurbel OA verbunden, die sich gemeinsam mit der Welle O dreht. Dieser Mechanismus heißt *Kurbeltrieb.* Wir bezeichnen die Länge der Kurbel OA mit r und die der Schubstange AB mit l und setzen voraus, daß die Welle O

sich gleichförmig dreht, d. h., daß der von der Kurbel mit der Zylinderachse gebildete Winkel φ sich proportional der Zeit

$$\varphi = \omega t$$

verändert, wobei ω eine konstante Zahl ist. Es ist die Bewegungsgleichung des Kolbens aufzustellen.

Es ist offensichtlich, daß die Bewegung des Kolbens M sich nicht von der Bewegung des Kreuzkopfes B unterscheidet. Die Frage läuft auf die Aufstellung der Bewegungsgleichung hinaus. Wir betrachten die Zylinderachse als x-Achse, legen den Koordinatenursprung in den Punkt O und bezeichnen die Abszisse des Punktes B mit x. Es wird x als Funktion der Zeit t gesucht. Indem wir vom Punkte A das Lot AK auf die x-Achse fällen, erhalten wir

$$x = OK + KB.$$

Andererseits erhalten wir, wenn wir den von der Schubstange AB mit der x-Achse gebildeten Winkel mit β bezeichnen:

$$OK = r\cos\varphi, \qquad KB = l\cos\beta,$$

und folglich ist

$$x = r\cos\varphi + l\cos\beta.$$

Wir ermitteln die Abhängigkeit zwischen den Winkeln β und φ.

Aus dem Dreieck OAB erhalten wir nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{r}{l}, \qquad \sin\beta = \frac{r}{l}\sin\varphi.$$

Wir bezeichnen wegen der kürzeren Schreibweise das Verhältnis $\frac{r}{l}$ mit λ.

Dann ist

$$\sin\beta = \lambda\sin\varphi, \qquad \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

Wenn wir den Ausdruck für $\cos\beta$ in die Formel für x einsetzen, erhalten wir:

$$x = r\cos\varphi + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

Setzen wir $\varphi = \omega t$ ein, so erhalten wir die gesuchte Bewegungsgleichung:

$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}. \tag{1}$$

Der Wert λ (das Verhältnis der Länge der Kurbel zur Länge der Schubstange) bleibt immer ein echter Bruch, gewöhnlich liegt sein Wert zwischen den Grenzen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$. In Anbetracht dessen, daß λ^2 eine verhältnismäßig kleine Größe ist, können wir die erhaltene Bewegungsgleichung des Kolbens vereinfachen.

Es gilt:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck in eine binomische Reihe, so erhalten wir

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\lambda^4\sin^4\varphi + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi + \cdots.$$

Der Wert $\frac{1}{8}\lambda^4$ ist sehr klein $\left(\text{bei } \lambda = \frac{1}{4} \text{ ist } \frac{1}{8}\lambda^4 = \frac{1}{2048}\right)$, noch kleiner sind die folgenden Glieder dieser Reihe, die λ^6, λ^8 usw. enthalten. Wenn wir all diese Glieder vernachlässigen, erhalten wir angenähert:

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$= 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\cos 2\varphi.$$

Hieraus ergibt sich:

$$x = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\cos 2\varphi\right),$$

oder, da $\lambda l = r$ ist,

$$x = r\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi\right) + l - \frac{\lambda r}{4}.$$

Wenn wir hier $\varphi = \omega t$ setzen, erhalten wir die angenäherte Bewegungsgleichung des Kreuzkopfes (oder des Kolbens):

$$x = r\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right) + l - \frac{\lambda r}{4}. \tag{2}$$

Diese Gleichung erweist sich als geeigneter für die Anwendung als die genaue Gleichung (1). Die Genauigkeit dieser angenäherten Gleichung genügt in den meisten Fällen für die praktischen Zwecke.

§ 79. Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, auf welche Weise die Bewegung des Punktes mit Hilfe seiner kartesischen Koordinaten x, y und z bestimmt werden kann. Wie bekannt, sind die kartesischen Koordinaten bei weitem nicht das einzige Koordinatensystem, das zur Bestimmung der Lage eines Punktes dienen kann. Zu demselben Zweck können auch Polarkoordinaten in der Ebene angewandt werden, oder zylindrische bzw. sphärische Koordinaten im Raume usw.

Jedes Koordinatensystem, mit dessen Hilfe man die Lage eines Punktes in einer Ebene oder im Raume bestimmen kann, läßt sich auch zur Bestimmung der Be-

wegung des Punktes verwenden. Wir werden uns hier mit der Anwendung von Polarkoordinaten zur Bestimmung der ebenen Bewegung eines Punktes beschäftigen.

Nehmen wir an, daß der Punkt M (Abb. 146) eine ebene Bewegung in der Abbildungsebene ausführt. Wir wählen in dieser Ebene den festen Punkt O (den wir Pol nennen) und die feste Gerade Ox. Die Polarkoordinaten des Punktes M sind der Abstand $OM = r$ (genannt Radiusvektor des Punktes M) und der Winkel φ, der vom Radiusvektor mit der x-Achse gebildet wird. Diesen Winkel definieren wir als positiv, wenn er durch Drehung der x-Achse im Gegenzeigersinn entsteht, im entgegengesetzten Fall definieren wir ihn als negativ.

Die Lage des Punktes M in der Ebene wird eindeutig durch seine Polarkoordinaten r und φ bestimmt. Bei der Bewegung des Punktes verändern sich die Koordinaten r und φ im Laufe der Zeit, d. h., sie sind Funktionen der Zeit t:

$$r = f_1(t); \qquad \varphi = f_2(t). \tag{1}$$

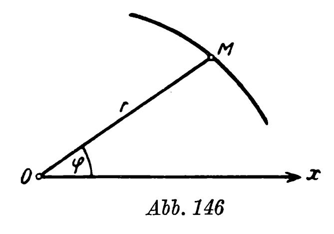


Abb. 146

Mit diesen Gleichungen ist die Bewegung des Punktes in der Ebene eindeutig bestimmt, wir nennen sie die *Bewegungsgleichungen eines Punktes in Polarkoordinaten.*

Wenn die Bewegungsgleichungen (1) gegeben sind, ist auch die Gleichung der Bewegungsbahn in Polarkoordinaten leicht aufzufinden: Man muß nur die Zeit t aus den Gleichungen (1) eliminieren. Als Ergebnis erhalten wir die Gleichung in folgender Form:

$$F(r, \varphi) = 0,$$

die die Polarkoordinaten des Punktes in jedem Zeitpunkt befriedigen müssen.

Beispiel 27. Die Bewegung eines Punktes in der Ebene ist durch die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten gegeben:

$$r = a\,t, \qquad \varphi = b\,t,$$

wobei a und b konstante Größen sind. Zu ermitteln ist die Gleichung der Bewegungsbahn.

Wir eliminieren die Zeit aus den gegebenen Bewegungsgleichungen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir:

$$t = \frac{\varphi}{b}.$$

Setzen wir diesen Wert t in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

$$r = \frac{a}{b}\varphi$$

oder, indem wir der Kürze halber $\frac{a}{b}$ mit c bezeichnen,

$$r = c\varphi.$$

Dies ist die Gleichung der Bewegungsbahn. Die Kurve, die durch diese Gleichung bestimmt ist, heißt *archimedische Spirale.*

KAPITEL XIII

DIE GESCHWINDIGKEIT

§ 80. Die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung

Die Bewegung eines Punktes heißt *gleichförmig*, wenn der Punkt in gleichen Zeitabständen gleiche Strecken zurücklegt. Stellen wir uns einen sich gleichförmig bewegenden Punkt M vor (Abb. 147) und nehmen an, daß dieser in jeder Zeiteinheit (z. B. Sekunde) die Strecke a durchläuft, wobei er sich auf der Bewegungsbahn in einer Richtung bewegt. Nun stellen wir die Gleichung der gleichförmigen Bewegung des Punktes M auf. Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ der Punkt die Lage M_0 einnimmt, die wir *Anfangslage des Punktes* nennen wollen. Der Buchstabe M bezeichnet die Lage des Punktes, die er zur Zeit t einnimmt. Wir wählen als Ausgangspunkt, von dem aus wir den Weg zählen, den Punkt O und definieren, in welcher Richtung vom Punkte O aus wir den durchlaufenen Weg als positiv ansehen werden. Alsdann ist die Länge des Bogens OM (mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen) der Weg s. Die Länge des Bogens OM_0 (ebenfalls mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen) bezeichnen wir mit s_0 und nennen sie *Anfangsweg*. Aus der Abbildung erhalten wir:

$$OM = OM_0 + M_0M\,.$$

-O+ M_0 M

Abb. 147

Es ist aber $OM = s, OM_0 = s_0$. Die Länge des Bogens M_0M ist jedoch der Weg, der von dem Punkte im Verlauf von t Zeiteinheiten zurückgelegt wurde. Da der Punkt in jeder Zeiteinheit den Weg a durchläuft, so ist $M_0M = at$. Folglich erhalten wir:

$$s = s_0 + at\,.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Punktes M.

Die Größe a, die die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes charakterisiert, heißt Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung. Also *ist die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung der Weg, den ein sich gleichförmig bewegender Punkt in einer Zeiteinheit durchläuft.*

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit mit dem Buchstaben v, d. h., nehmen wir $a = v$ an, so erhalten wir die *Gleichung der gleichförmigen Bewegung* in folgender endgültigen Form:

$$s = s_0 + vt\,.$$

Lösen wir diese Gleichung nach v auf, so finden wir:

$$v = \frac{s - s_0}{t}\,,$$

woraus folgt, *daß die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung gleich dem Verhältnis des während irgendeines Zeitraumes durchlaufenen Weges zur Größe dieses Zeitraumes ist.*

Durchläuft der sich gleichförmig bewegende Punkt die Längeneinheit in der Zeiteinheit, so ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{1} = 1 .$$

Hieraus folgt, daß wir als *Geschwindigkeitseinheit* die Geschwindigkeit einer solchen gleichförmigen Bewegung annehmen müssen, bei der der Punkt die Längeneinheit in der Zeiteinheit durchläuft. Wird z. B. als Längeneinheit ein Zentimeter angenommen und als Zeiteinheit eine Sekunde, so müssen wir als Geschwindigkeitseinheit die Geschwindigkeit einer solchen gleichförmigen Bewegung annehmen, bei der der Punkt einen Zentimeter in einer Sekunde durchläuft. Diese Geschwindigkeitseinheit wird mit cm/s bezeichnet. Wird jedoch als Längeneinheit ein Meter und als Zeiteinheit eine Minute angenommen, so müssen wir als Geschwindigkeitseinheit m/min annehmen. Es entspricht also jeder Wahl der Längeneinheit und der Zeiteinheit eine besondere Geschwindigkeitseinheit. Nehmen wir an, die Geschwindigkeit bei irgendeiner gleichförmigen Bewegung sei $v = 120$ m/min. Diese Geschwindigkeit soll nun in cm/s ausgedrückt werden. Im gegebenen Fall durchläuft der Punkt in einer Minute 120 m oder 12000 cm, also in einer Sekunde durchläuft er $\frac{12000}{60} = 200$ cm, d. h.

$$v = 200 \text{ cm/s} .$$

Hieraus ergibt sich eine einfache Regel für die Umrechnung von einer Geschwindigkeitseinheit in eine andere: Man schreibe die gegebene Geschwindigkeit in der entsprechenden Geschwindigkeitseinheit und ersetze die gegebenen Längen- und Zeiteinheiten durch die neuen. Durch Multiplikation erhält man das geforderte Ergebnis, z. B.:

$$v = 120 \text{ m/min} = 120 \frac{100}{60} \text{cm/s} = \frac{12000 \text{ cm}}{60 \text{ s}} = 200 \text{ cm/s} .$$

§ 81. Die Geschwindigkeit bei beliebiger Bewegung

Wir stellen uns den Punkt M vor, der eine beliebige Bewegung im Raume vollführe (Abb. 148). Auf der Bewegungsbahn AB des Punktes M wählen wir den Punkt O als Ausgangspunkt, von dem aus wir den Weg zählen, und nehmen an, daß die Bewegungsgleichung des Punktes M

$$s = f(t)$$

lautet.

Wir wählen zwei Zeiten t und $t + \Delta t$. Angenommen, daß zur Zeit t der sich bewegende Punkt die Lage M einnimmt und zur Zeit $t + \Delta t$ die Lage M_1, so bezeichnen wir die Länge des Bogens MM_1, die der Punkt in der Zeit Δt durchlaufen hat, mit Δs.

Das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ heißt *mittlere Geschwindigkeit* des Punktes während der Zeit Δt.

Wir werden jetzt den Zeitraum Δt verringern und ihn gegen Null gehen lassen. Dann wird auch die Länge des Bogens Δs gegen Null gehen; die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ aber wird sich einem Grenzwert nähern. Dieser Grenzwert heißt *Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t.*

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t mit dem Buchstaben v, so erhalten wir:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right]. \tag{1}$$

Der Weg s ist jedoch eine Funktion der Zeit t. Da Δt der Zuwachs der unabhängigen Variablen t und Δs der entsprechende der Funktion s ist, so ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, wenn Δt gegen Null geht, der Differentialquotient des Weges s nach der Zeit t.

Folglich gilt:

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

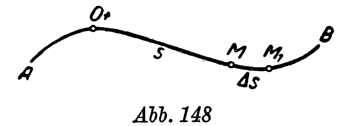


Abb. 148

d. h., *die Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.*

Wir bemerken, daß wir für die Geschwindigkeit v eine positive oder eine negative Größe erhalten, wenn wir die Geschwindigkeit v nach den Formeln (1) oder (2) bestimmen. In Abb. 148 setzen wir voraus, daß der Punkt M sich in Richtung anwachsender s bewege. In diesem Falle ist $\Delta s > 0$, folglich:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0, \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] > 0.$$

Würde sich der Punkt M in der Richtung abnehmender s bewegen, so wäre $\Delta s < 0$ und folglich:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < 0, \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] < 0.$$

Dementsprechend bestimmt das Vorzeichen der Geschwindigkeit die Richtung der Bewegung des Punktes: Die Geschwindigkeit ist positiv, wenn der Punkt sich in Richtung wachsender Wege s bewegt, und negativ, wenn sich der Punkt in Richtung abnehmender s bewegt.

In den weiteren Untersuchungen ist es angebracht, die Geschwindigkeit als *Vektorgröße* zu betrachten. Demgemäß vereinbaren wir, von nun an die Geschwindigkeitsgröße stets als positiv zu bewerten, wenn wir den absoluten Betrag des Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ betrachten, d. h.

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Zugleich vereinbaren wir, der Geschwindigkeit v die Richtung der Tangente an die Bewegungsbahn im gegebenen Punkte zuzuschreiben, die in der Richtung der Bewegung verläuft (Abb. 149). Wir erinnern daran, daß die Tangente MT an irgendeine Kurve im gegebenen Punkte M die Grenzlage der Sekante MS ist, wenn M_1 sich dem Punkte M nähert (Abb. 150).

Nach dieser Methode wird die Geschwindigkeit nicht durch ihr Vorzeichen bestimmt, sondern durch einen Richtungspfeil, der an das Ende der Strecke gesetzt wird, die die Geschwindigkeit darstellt.



Abb. 149 *Abb. 150*

§ 82. Ableitung eines Vektors

Wir führen den für das weitere wichtigen Begriff der *Ableitung eines Vektors* ein.

Stellen wir uns einen beliebigen variablen Vektor $\mathfrak{a}$ vor, der sich im Laufe der Zeit so verändert, daß zu den verschiedenen Zeiten entsprechende absolute Beträge und Richtungen des Vektors $\mathfrak{a}$ gehören. In diesem Falle nennen wir den variablen Vektor $\mathfrak{a}$ eine *Vektorfunktion der Zeit t* und schreiben ihn $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(t)$. Die Vektorfunktion $\mathfrak{a}(t)$ gibt für ein bestimmtes Argument t Größe und Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ in dem betrachteten Zeitpunkte an.

Betrachten wir zwei Zeiten t und $t + \Delta t$ und die entsprechenden Werte $\mathfrak{a}(t)$ und $\mathfrak{a}(t + \Delta t)$ unserer Vektorfunktion. Die Differenz der Vektoren $\mathfrak{a}(t + \Delta t)$ und $\mathfrak{a}(t)$ bezeichnen wir mit $\Delta\mathfrak{a}$, d. h., wir nehmen an:

$$\Delta\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(t + \Delta\,t) - \mathfrak{a}(t).$$

Um den Vektor $\Delta\mathfrak{a}$ zu erhalten, tragen wir die Vektoren $\mathfrak{a}(t)$ und $\mathfrak{a}(t + \Delta t)$ von einem Punkte aus ab und verbinden durch einen geradlinigen Abschnitt die Enden dieser Vektoren: Die Differenz $\Delta\mathfrak{a}$ nennen wir den Vektor, der, zu $\mathfrak{a}(t)$ addiert, $\mathfrak{a}(t + \Delta t)$ ergibt (Abb. 151). Der Vektor $\Delta\mathfrak{a}$ erhält die Bezeichnung „Zuwachs der vektoriellen Funktion $\mathfrak{a}(t)$“ und entspricht dem Anwachsen des Arguments t um Δt.

Hierauf konstruieren wir einen neuen Vektor $\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta t}$. Die Richtung dieses Vektors, der sich vom Vektor $\Delta\mathfrak{a}$ lediglich durch den skalaren Faktor $\frac{1}{\Delta t}$ unterscheidet, fällt mit der Richtung des Vektors $\Delta\mathfrak{a}$ zusammen.

Wir werden jetzt den Zeitraum Δt so verringern, daß er gegen Null geht. Dann wird auch der Vektor $\Delta\mathfrak{a}$ gegen Null gehen, der Vektor $\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta t}$ jedoch sich irgendeinem

Grenzwert nähern.[1] Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* der Funktion $\mathfrak{a}(t)$ nach der Zeit t und wird mit $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ bezeichnet, so daß

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \mathfrak{a}}{\Delta t}\right].$$

Wir setzten voraus, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ eine Funktion der Zeit t ist. Man kann sich einen variablen Vektor vorstellen, der sich zwar nicht in Abhängigkeit von der Zeit, sondern in Abhängigkeit von einer beliebigen anderen skalaren Variablen verändert. Man kommt dann zum Begriff der Ableitung der Vektorfunktion nach einer beliebigen skalaren Variablen. Im übrigen werden wir es in der Kinematik hauptsächlich mit variablen Vektoren zu tun haben, die von der Zeit abhängig sind. Deshalb wird für uns der Begriff der Ableitung eines Vektors nach der Zeit eine besondere Bedeutung haben.

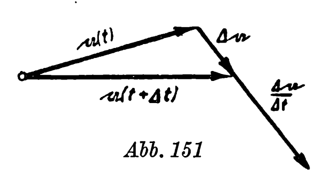


Abb. 151

§ 83. Die einfachsten Regeln der Differentiation von Vektoren

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Grundregeln der skalaren Differentiation, die in der Differentialrechnung aufgestellt sind, ebenfalls für vektorielle Differentiation gelten. Wir wollen uns mit einigen einfachsten Regeln der Differentiation von Vektoren befassen. Als unabhängige Variable nehmen wir die Zeit t an.

1. Wir werden den Vektor $\mathfrak{a}$ *konstant* nennen und ihn

$$\mathfrak{a} = \text{const}$$

schreiben, *wenn dieser Vektor eine unveränderliche Größe und eine unveränderliche Richtung besitzt.* In diesem Falle ist $\Delta\mathfrak{a} = 0$ und folglich

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = 0.$$

Somit ist die *Ableitung eines konstanten Vektors gleich Null.*

Man muß jedoch, wenn lediglich die Größe des Vektors $\mathfrak{a}$ unverändert bleibt, seine Richtung im Verlauf der Zeit aber veränderlich ist, feststellen, daß $\Delta\mathfrak{a}$ nicht gleich Null ist, und infolgedessen auch die Ableitung $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ nicht Null wird.

[1] Wir nennen den Vektor $\mathfrak{A}$ Grenzwert des variablen Vektors $\mathfrak{B}$ und schreiben

$$\mathfrak{A} = \lim\,[\mathfrak{B}],$$

wenn der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ gleich dem Grenzwert des absoluten Betrages des Vektors $\mathfrak{B}$ ist und die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ mit der Grenzrichtung des Vektors $\mathfrak{B}$ zusammenfällt.

2. Gegeben seien zwei veränderliche Vektoren $\mathfrak{a}_1(t)$ und $\mathfrak{a}_2(t)$. Wir bilden ihre Summe

$$\mathfrak{a}(t) = \mathfrak{a}_1(t) + \mathfrak{a}_2(t).$$

Nehmen wir an, daß zur Zeit t unsere Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sind. Zur Zeit $t + \Delta t$ bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1 + \Delta\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2 + \Delta\mathfrak{a}_2$, wobei $\Delta\mathfrak{a}$, $\Delta\mathfrak{a}_1$, $\Delta\mathfrak{a}_2$ die Zuwüchse der entsprechenden Vektoren in der Zeit Δt sind. Wir erhalten die vektoriellen Gleichungen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2,$$

$$\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \Delta\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \Delta\mathfrak{a}_2,$$

woraus

$$\Delta\mathfrak{a} = \Delta\mathfrak{a}_1 + \Delta\mathfrak{a}_2$$

folgt.

Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichungen durch Δt, so erhalten wir

$$\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathfrak{a}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathfrak{a}_2}{\Delta t},$$

woraus wir, indem wir zur Grenze $t \to 0$ übergehen, finden:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt}.$$

Somit bleibt der Satz „Die Ableitung der Summe ist gleich der Summe der Ableitungen" auch bei der vektoriellen Differentiation berechtigt. Dieser Satz ist für eine beliebige Anzahl von Vektorkomponenten gültig.

3. Gegeben sei die Vektorfunktion $\mathfrak{a}(t)$ und die skalare Funktion $m(t)$. Wir bilden ihr Produkt, das wir mit $\mathfrak{b}(t)$ bezeichnen:

$$\mathfrak{b}(t) = m(t)\,\mathfrak{a}(t).$$

Die Werte des Skalars $m(t)$ und der Vektoren $\mathfrak{a}(t)$ und $\mathfrak{b}(t)$ zur Zeit t bezeichnen wir mit m, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und zur Zeit $t + \Delta t$ mit $m + \Delta m$, $\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \Delta\mathfrak{b}$. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{b} = m\,\mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{b} + \Delta\mathfrak{b} = (m + \Delta m)(\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a}).$$

Wir wissen (siehe § 3), daß für die Multiplikation einer Vektorensumme mit einem skalaren Faktor jeder einzelne Vektor der Summe mit diesem Faktor multipliziert werden muß. Folglich ist

$$(m + \Delta m)(\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a}) = (m + \Delta m)\,\mathfrak{a} + (m + \Delta m)\,\Delta\mathfrak{a}.$$

Andererseits gelten die Gleichungen:

$$(m + \Delta m)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + \Delta m \cdot \mathfrak{a},$$

$$(m + \Delta m) \cdot \Delta\,\mathfrak{a} = m\Delta\,\mathfrak{a} + \Delta m \cdot \Delta\,\mathfrak{a}.$$

Folglich ist:

$$\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b} = m\mathfrak{a} + \Delta m \cdot \mathfrak{a} + m\Delta\,\mathfrak{a} + \Delta m \cdot \Delta\,\mathfrak{a}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\Delta\,\mathfrak{b} = \Delta m \cdot \mathfrak{a} + m \cdot \Delta\,\mathfrak{a} + \Delta m \cdot \Delta\,\mathfrak{a}.$$

Wir teilen beide Seiten dieser Gleichung durch Δt und gehen zur Grenze $t \to 0$ über. Da das Glied $\Delta m \cdot \Delta\,\mathfrak{a}$ eine kleine Größe zweiter Ordnung ist (im Verhältnis zu Δt), erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \mathfrak{a} + m\frac{d\mathfrak{a}}{dt}.$$

Wie ersichtlich, bleibt die Differentiationsregel für Produkte auch im gegebenen Falle gültig.

4. Gegeben seien die Vektorfunktionen $\mathfrak{a}(t)$ und $\mathfrak{b}(t)$. Wir ermitteln ihr Vektorprodukt:

$$\mathfrak{c}(t) = \mathfrak{a}(t) \times \mathfrak{b}(t).$$

Indem wir, wie oben, die Vektoren zur Zeit t mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnen und zur Zeit $t + \Delta t$ mit $\mathfrak{a} + \Delta\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \Delta\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} + \Delta\mathfrak{c}$, erhalten wir:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{c} + \Delta\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \Delta\,\mathfrak{a}) \times (\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b}).$$

Nach der Multiplikationsregel zweier Vektorensummen (s. § 60) erhalten wir:

$$(\mathfrak{a} + \Delta\,\mathfrak{a}) \times (\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b}$$

und folglich

$$\mathfrak{c} + \Delta\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\Delta\,\mathfrak{c} = \Delta\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \times \Delta\,\mathfrak{b}.$$

Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch Δt, so erhalten wir

$$\frac{\Delta\,\mathfrak{c}}{\Delta t} = \frac{\Delta\,\mathfrak{a}}{\Delta t} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \frac{\Delta\,\mathfrak{b}}{\Delta t} + \frac{\Delta\,\mathfrak{a}}{\Delta t} \times \Delta\,\mathfrak{b}.$$

Indem wir zur Grenze $\Delta t \to 0$ übergehen und feststellen daß das letzte Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung dabei zu Null wird (da $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [\Delta \mathfrak{b}] = 0$ ist), erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{c}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \frac{d\mathfrak{b}}{dt}.$$

Somit ist die Regel der Differentiation eines Produktes auch in dem Falle der Differentiation eines Vektorproduktes zweier Vektoren wichtig.

§ 84. Die Geschwindigkeit als Ableitung des Radiusvektors

Wir zeigen, daß der von uns am Schluß des § 81 definierte Begriff der Geschwindigkeit als vektorielle Größe in engster Weise mit dem Begriff der Ableitung eines Vektors verbunden ist.

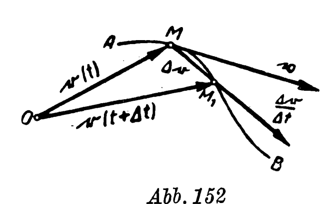


Abb. 152

Stellen wir uns den Punkt M vor, der sich auf der Bewegungsbahn AB bewegt (Abb.152). Nehmen wir an, daß zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ der sich bewegende Punkt die Lagen M und M_1 einnimmt.

Wenn wir die Länge des Bogens MM_1 mit Δs bezeichnen, gilt für die Größe der Geschwindigkeit v:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \frac{ds}{dt}$$

unter der Voraussetzung, daß die Richtung der Bewegung des Punktes M als positive Richtung auf dem Bogen gewählt wird. Die Geschwindigkeit v ist gegeben durch den Verlauf der Tangente an die Bewegungsbahn in Richtung der Bewegung.

Betrachten wir jetzt irgendeinen festen Punkt O und ziehen von ihm aus den Radiusvektor $\overline{OM} = \mathfrak{r}$ zum Punkte M. Bei der Bewegung des Punktes M verändert der Radiusvektor $\overline{OM}$ im Laufe der Zeit seine Größe und seine Richtung. Folglich können wir ihn als Vektorfunktion $\mathfrak{r}(t)$ der Zeit ansehen. Wir ermitteln die Ableitung dieser Funktion.

Wenn wir die Radiusvektoren $\overline{OM}$ und $\overline{OM_1}$ ziehen, erhalten wir unsere Funktionen $\mathfrak{r}(t)$ und $\mathfrak{r}(t + \Delta t)$. Als geometrischer Zuwachs $\Delta \mathfrak{r}$ der Funktion $\mathfrak{r}(t)$ erscheint die Sehne $\overline{MM_1}$ der Bewegungsbahn AB. Die Ableitung $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ ermitteln wir als Grenzwert, dem sich der Vektor $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$ nähert, wenn Δt gegen Null geht.

Wir berechnen den absoluten Betrag der Ableitung des Vektors $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ $\left(\text{wir bezeichnen diesen absoluten Betrag mit } \left|\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right|\right)$ als Grenzwert des absoluten Betrages des Vek-

tors $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$. Bezeichnen wir den absoluten Betrag des Vektors $\Delta \mathfrak{r}$ (d. h. die Länge der Sehne MM_1) mit $\Delta \sigma$, so erhalten wir

$$\left|\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right]\cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \frac{ds}{dt},$$

da

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right] = 1, \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \frac{ds}{dt}$$

ist.

Somit ist der Grenzwert des absoluten Betrages des Vektors $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$ gleich der Ableitung $\frac{ds}{dt}$.

Andererseits verläuft der Vektor $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$ auf der Sehne MM_1. Da die Grenzrichtung der Sehne die Richtung der Tangente an die Bewegungsbahn im Punkte M ist, erscheint als Grenzrichtung des Vektors $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$ die Richtung der Tangente an die Bewegungsbahn (die mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt).

Wie ersichtlich, ist die Ableitung $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ dem absoluten Betrage nach gleich der Ableitung $\frac{ds}{dt}$ und verläuft auf der Tangente an die Bewegungsbahn in Richtung der Bewegung. Wir folgern daraus, daß diese Ableitung gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ unseres sich bewegenden Punktes ist.

Somit gilt, wenn wir die Geschwindigkeit als Vektor ansehen:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

d. h., *die Geschwindigkeit ist gleich der Ableitung des Radiusvektors nach der Zeit.*

Es muß bemerkt werden, daß wir den Vektor $\frac{\Delta \mathfrak{r}}{\Delta t}$ auch als eine Geschwindigkeit betrachten können: Es ist dies die Geschwindigkeit, die der Punkt M hätte, wenn er während der Zeit Δt nicht den Bogen MM_1, sondern die Sehne MM_1 in gleichförmiger Bewegung durchlaufen würde. Diese Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung auf der Sehne bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_m$. Es gilt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\mathfrak{v}_m\right],$$

d. h., die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist gleich dem Grenzwert, dem sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der gleichförmigen Bewegung auf der Sehne nähert, wenn Δt gegen Null geht.

§ 85. Die Komponenten der Geschwindigkeit auf den rechtwinkligen Koordinatenachsen

Nehmen wir an, daß die Bewegung des Punktes M (Abb. 153) durch Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten gegeben sei:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

Wir berechnen die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Koordinatenachsen x, y und z. Zunächst konstruieren wir die Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf der z-Achse. Diese Komponente bezeichnen wir mit v_z (Abb. 153).

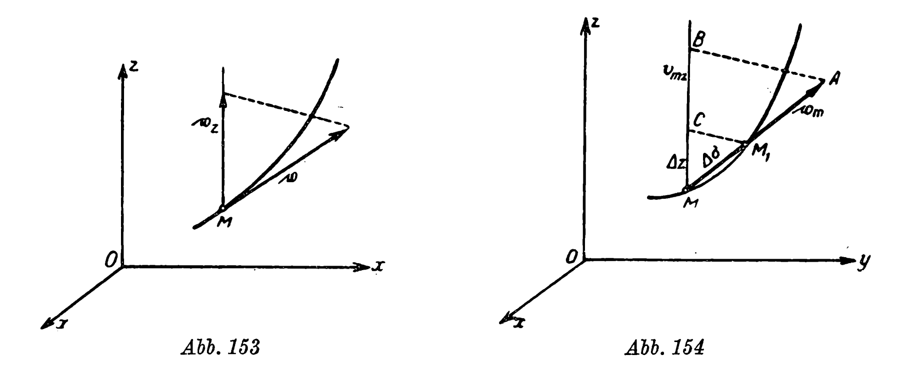


Abb. 153 *Abb. 154*

Zur Berechnung der Komponente v_z benutzen wir die Bemerkung, die am Ende des vorigen Paragraphen gemacht wurde, und gehen in folgender Form vor: Wir konstruieren zuerst die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der gleichförmigen Bewegung auf der Sehne, berechnen ihre Komponente auf der z-Achse und gehen hierauf zur Grenze $\Delta t \to 0$ über. Als Grenzwert erhalten wir die gesuchte Größe v_z.

Nun wählen wir die Zeit t und $t + \Delta t$ und bezeichnen die Lagen des sich bewegenden Punktes mit M und M_1 (Abb. 154). Dann ziehen wir die Sehne $MM_1 = \Delta\sigma$ und konstruieren die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der gleichförmigen Bewegung auf der Sehne MM_1. Wenn wir vom Ende A der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ das Lot AB auf die Gerade fällen, die durch den Punkt M und parallel zur z-Achse verläuft, erhalten wir die Komponente MB der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ auf der z-Achse, die wir mit v_{mz} bezeichnen.

Wir fällen ebenso vom Punkte M_1 das Lot M_1C auf die erwähnte Gerade, die durch den Punkt M und parallel zur z-Achse verläuft. Die Koordinaten des Punktes M sind x, y und z, und die Koordinaten des Punktes M_1 sind $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Es ist klar, daß $MC = \Delta z$ ist.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und MM_1C folgern wir

$$\frac{v_{mz}}{v_m} = \frac{\Delta z}{\Delta \sigma}$$

oder

$$v_{mz} = v_m \cdot \frac{\Delta z}{\Delta \sigma}.$$

Andererseits wird die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der gleichförmigen Bewegung auf der Sehne MM_1 durch die Formel

$$v_m = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}$$

bestimmt.

Folglich ist

$$v_{mz} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta \sigma} = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Hieraus erhalten wir, indem wir zur Grenze $\Delta t \to 0$ übergehen:

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} [v_{mz}] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right].$$

Die Koordinate z ist jedoch eine Funktion von t. Δz ist der Zuwachs dieser Funktion, der dem Zuwachs Δt der unabhängigen Variablen t entspricht. Folglich ist $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$ die Ableitung der Koordinate z nach der Zeit t:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Durch die gleichen Überlegungen könnten wir analoge Resultate für die Komponenten v_x und v_y der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Achsen x und y erhalten:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}.$$

Somit sind die *Komponenten der Geschwindigkeit auf den festen rechtwinkligen Koordinatenachsen gleich den Ableitungen der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit.*

Die erhaltenen Formeln kann man zur Berechnung der Geschwindigkeit benutzen, wenn die *Bewegung des Punktes* durch *Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten* gegeben ist.

Nehmen wir an, daß die Bewegung des Punktes M durch die Bewegungsgleichungen

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

bezogen auf die Achsen x, y und z, gegeben sei (Abb. 155).

Zur Berechnung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ konstruieren wir ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel zu den Achsen x, y und z verlaufen und in dem die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als Diagonale erscheint. Die Kanten dieses rechtwinkligen Parallelepipeds sind der Größe nach gleich den Komponenten der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z.

Wir berechnen diese Komponenten aus den Gleichungen:

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}.$$

Danach ermitteln wir die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ aus der Formel

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Weiterhin gilt

$$v_x = v \cos(\mathfrak{v}, x), \qquad v_y = v \cos(\mathfrak{v}, y), \qquad v_z = v \cos(\mathfrak{v}, z),$$

woraus

$$\cos(\mathfrak{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \qquad \cos(\mathfrak{v}, y) = \frac{v_y}{v}, \qquad \cos(\mathfrak{v}, z) = \frac{v_z}{v}$$

folgt.

Mit diesen Formeln ist der Verlauf der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bestimmt.

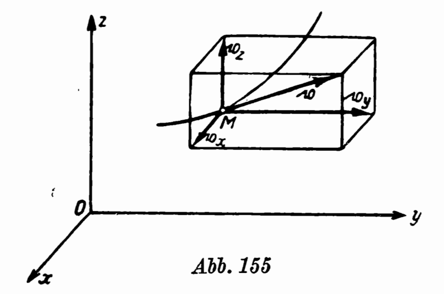


Abb. 155

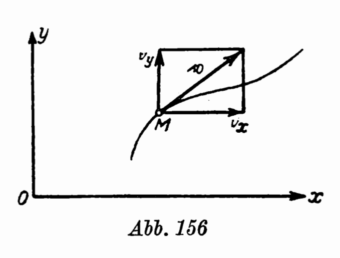


Abb. 156

Wir betrachten den Sonderfall der ebenen Bewegung eines Punktes und nehmen an, daß der Punkt M (Abb. 156) eine ebene Bewegung in der x-y-Ebene vollführe. Seine Bewegung sei durch die Bewegungsgleichungen

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

gegeben.

Wollen wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bestimmen, so berechnen wir die Komponenten der Geschwindigkeit v_x und v_y aus den Formeln

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}.$$

Danach ermitteln wir die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als Diagonale des Rechtecks, das aus den Komponenten v_x und v_y konstruiert ist:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird durch die Formeln

$$\cos(\mathfrak{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \qquad \cos(\mathfrak{v}, y) = \frac{v_y}{v}$$

bestimmt.

Wir wollen uns noch mit dem Sonderfall der geradlinigen Bewegung des Punktes beschäftigen und nehmen dazu an, daß der Punkt M (Abb. 157) eine geradlinige Bewegung auf der x-Achse ausführe. Dann ist seine Bewegung durch die Gleichung

$$x = f(t)$$

gegeben. Wir berechnen die Komponente v_x der Geschwindigkeit aus der Formel

$$v_x = \dot{x}.$$

Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf der x-Achse verläuft (in Richtung der positiven x-Achse, wenn $v_x > 0$, und entgegengesetzt, wenn $v_x < 0$), ist die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleich dem absoluten Betrage der Komponente v_x, d. h.

$$v = |v_x|.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird aber, wie soeben gezeigt wurde, durch das Vorzeichen der Komponente v_x bestimmt.

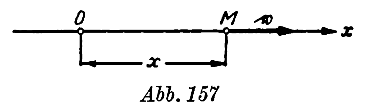


Abb. 157

Beispiel 28. Es ist die Geschwindigkeit des Punktes M eines Ellipsographen zu ermitteln (s. Beispiel 25).

Die Bewegung des Punktes M wird durch die Gleichungen

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t$$

bestimmt. Hieraus erhalten wir:

$$v_x = \dot{x} = -a\,\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = \dot{y} = b\,\omega \cos \omega t.$$

Folglich ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}\,.$$

Beispiel 29. Es ist die Geschwindigkeit des Kolbens einer Dampfmaschine zu berechnen (s. Beispiel 26).

Die Bewegung eines Kolbens ist identisch mit der Bewegung eines Kreuzkopfes. Wir benutzen daher die angenäherte Gleichung für die Bewegung eines Kreuzkopfes:

$$x = r\left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\,\omega t\right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

Hieraus erhalten wir:

$$v_x = \dot{x} = -r\,\omega\left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\,\omega t\right).$$

Die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Kolbens ist gleich dem absoluten Betrage dieses Ausdruckes. Das Vorzeichen der Komponente v_x gibt die Richtung der Bewegung des Kolbens an.

§ 86. Eine andere Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten auf den Koordinatenachsen

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen Formeln für die Komponenten der Geschwindigkeit auf den Koordinatenachsen kann man auch auf einem anderen Wege ermitteln, indem man die bekannte Formel der Zerlegung eines Vektors in Komponenten benutzt, die in § 42 aufgestellt wurde.

Wir wissen, daß die Geschwindigkeit gleich der Ableitung des Radiusvektors des sich bewegenden Punktes nach der Zeit ist. Wir stellen uns den sich bewegenden Punkt M vor und bezeichnen den Radiusvektor, der vom Ursprung der Koordinatenachsen x, y und z nach dem Punkt M geführt wird, mit $\mathfrak{r}$. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

bestimmt. Wenden wir jetzt auf den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ die Formel für die Zerlegung eines Vektors in Komponenten auf den Achsen x, y und z an. Wir bezeichnen die Einheitsvektoren, die auf diesen Achsen verlaufen, mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ und ziehen in Betracht, daß die Komponenten des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ auf den Achsen x, y und z gleich den Koordinaten x, y und z des Punktes M sind, dann erhalten wir:

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}.$$

Wenden wir weiterhin zur Berechnung der Ableitung $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ die Regeln der Differentiation eines Vektors an, die in § 83 angeführt wurden, und bemerken, daß die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ konstante Größe und konstante Richtung besitzen, so erhalten wir

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dy}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dz}{dt}\mathfrak{k}.$$

Andererseits führt dieselbe Formel der Zerlegung in Komponenten auf den Koordinatenachsen, wenn sie auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ angewendet wird, zu der Gleichung

$$\mathfrak{v} = v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{i} + v_z\mathfrak{k},$$

wobei v_x, v_y, v_z die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Achsen x, y und z sind. Vergleichen wir die beiden erhaltenen Formeln, so finden wir:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Auf diese Weise kommen wir auf anderem Wege erneut zu demselben Ergebnis: Die Komponenten der Geschwindigkeit sind gleich den Ableitungen der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit. Wir haben es für nützlich erachtet, hier diese Vektordarstellung der Formeln für die Komponenten der Geschwindigkeit auf den Koordinatenachsen anzuführen. Im weiteren werden wir Gelegenheit haben, diese Darstellung zur Berechnung der Komponenten auf den Koordinatenachsen auch auf andere kinematische Größen anzuwenden.

KAPITEL XIV

DIE BESCHLEUNIGUNG

§ 87. Die geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung

Die Bewegung eines Punktes heißt *gleichförmig beschleunigt*, wenn sich ihre Geschwindigkeit in gleichen Zeiträumen um dieselbe Größe verändert. Wenn hierbei die Geschwindigkeit ihrer absoluten Größe nach wächst, heißt die Bewegung *gleichförmig beschleunigt*, wenn jedoch die Geschwindigkeit sich verringert, heißt sie *gleichförmig verzögert.*

Stellen wir uns den Punkt M vor, der sich geradlinig und gleichförmig beschleunigt bewegt (Abb. 158), und nehmen wir an, daß in jeder Zeiteinheit (z. B. in jeder Sekunde) die Größe der Geschwindigkeit des Punktes sich um dieselbe (positive oder negative) Größe c verändert. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Punkt in der Anfanglage M_0 und habe zu dieser Zeit die Geschwindigkeit v_0, die wir *Anfangsgeschwindigkeit* nennen. Zur Zeit t nimmt der Punkt die Lage M ein und besitzt die Geschwindigkeit v. Da sich in t Zeiteinheiten die Geschwindigkeit des Punktes um die Größe ct verändert hat, ist

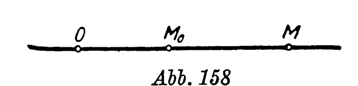


Abb. 158

$$v = v_0 + ct.$$

Die Größe c, die anzeigt, wie schnell sich die Geschwindigkeit verändert, heißt *Beschleunigung der geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung.*

Somit ist die Beschleunigung der geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung der Zuwachs der Geschwindigkeit, bezogen auf die Zeiteinheit.

Bezeichnen wir die Beschleunigung mit dem Buchstaben w, d. h., nehmen wir $c = w$ an, so erhalten wir das Gesetz nach dem sich die Größe der Geschwindigkeit bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung verändert, in folgender endgültigen Gestalt:

$$v = v_0 + wt. \tag{1}$$

Wir lösen diese Gleichung nach w auf:

$$w = \frac{v - v_0}{t}, \tag{2}$$

d. h., die Beschleunigung der geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung ist gleich dem Verhältnis des Zuwachses der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitraum zu diesem Zeitraum.

Gleichung (2) zeigt, daß die Beschleunigung positiv ist, wenn sich die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit vergrößert, und negativ im entgegengesetzten Falle.

Wir stellen noch die Gleichung der zu betrachtenden geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung auf, d. h., wir drücken die Entfernung s als Funktion der Zeit t aus. Zu diesem Zweck wählen wir als Ausgangspunkt der Wegzählung den

Punkt O und setzen fest, nach welcher Seite wir den Weg als positiv rechnen wollen. Dann ist $OM = s$ der Weg zur Zeit t. Der Abschnitt OM_0 ist der Weg, der zwischen dem Punkte O und der Lage M_0 zur Zeit $t = 0$ liegt; wir bezeichnen ihn mit s_0 und nennen ihn den Anfangsweg. Erinnern wir uns, daß die Größe der Geschwindigkeit gleich der Ableitung des Weges nach der Zeit ist und beachten Gleichung (1), so erhalten wir

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + wt.$$

Wir integrieren:

$$s = v_0 t + \frac{w t^2}{2} + C.$$

Hierin ist C eine beliebige Konstante. Diese Konstante kann leicht bestimmt werden. Die Gleichung muß für jede Zeit t gelten, also auch zur Zeit $t = 0$. Daraus erhalten wir:

$$s_0 = C,$$

d. h., die Konstante C ist gleich dem Anfangsweg. Endgültig erhalten wir für s den Ausdruck

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w t^2}{2}.$$

Dies ist die Gleichung der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Wie wir sehen, ist im betrachteten Fall die Entfernung s eine Funktion zweiten Grades der Zeit t.

Wir betrachten nun die geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung des Punktes, bei welcher der Geschwindigkeitszuwachs pro Zeiteinheit gleich eins ist. Nach Gleichung (2) ist die Beschleunigung dieser Bewegung gleich

$$w = \frac{1}{1} = 1.$$

Hieraus folgt, daß wir als *Beschleunigungseinheit* die Beschleunigung einer solchen geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung annehmen müssen, bei der die Größe der Geschwindigkeit um eine Geschwindigkeitseinheit in der Zeiteinheit anwächst. Wird z. B. als Längeneinheit ein Zentimeter angenommen und als Zeiteinheit eine Sekunde, so müssen wir als Beschleunigungseinheit die Beschleunigung einer solchen geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung annehmen, bei der in jeder Sekunde die Geschwindigkeit um 1 cm/s anwächst. Diese Beschleunigungseinheit wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\frac{\text{cm/s}}{\text{s}} = \text{cm/s}^2.$$

Wird jedoch als Längeneinheit ein Meter angenommen und als Zeiteinheit eine Minute, so müssen wir als Beschleunigungseinheit m/min^2 annehmen. Überhaupt entspricht jeder Wahl der Längeneinheit und der Zeiteinheit eine eigene Beschleunigungseinheit.

Nehmen wir an, die Beschleunigung irgendeiner gleichförmig beschleunigten Bewegung sei $w = 3$ m/min². Wir haben diese Beschleunigung in cm/s² auszudrücken.

Im gegebenen Falle verändert sich die Geschwindigkeit des Punktes in jeder Minute um 3 m/min oder um $3 \cdot \frac{100\,\text{cm}}{60\,\text{s}} = 5$ cm/s, also in jeder Sekunde verändert sich die Geschwindigkeit um $\frac{5}{60}$ cm/s $= \frac{1}{12}$ cm/s. Folglich ist die gesuchte Beschleunigung

$$w = \frac{1}{12}\,\text{cm/s}^2.$$

Hieraus ergibt sich folgende Regel für den Übergang von einer Beschleunigungseinheit zu einer anderen: Schreibt man die gegebene Beschleunigung mit der zugehörigen Beschleunigungseinheit auf, so hat man die gegebenen Längen- und Zeiteinheiten durch neue Längen- und Zeiteinheiten zu ersetzen; z. B.

$$w = \frac{3\,\text{m}}{\text{min}^2} = 3\,\frac{100\,\text{cm}}{(60\,\text{s})^2} = \frac{3 \cdot 100\,\text{cm}}{3600\,\text{s}^2} = \frac{1}{12}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Beispiel 30. Auf einem geradlinigen Teilstück einer Eisenbahnstrecke wird ein Zug gebremst. Im Augenblick des Bremsbeginns hat der Zug eine Geschwindigkeit von 20m/s. Er hält, nachdem er 20 s lang gebremst wurde. Die Bewegung des gebremsten Zuges ist als gleichförmig verzögert vorauszusetzen, die Bremsstrecke, d. h. die Strecke, die der Zug während der Zeit des Bremsens zurücklegt, ist zu ermitteln.

Wir benutzen die Formeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w t^2}{2}, \qquad v = v_0 + w \cdot t.$$

Der Bremsbeginn wird als Anfang der Zeitzählung und die diesem Augenblick entsprechende Lage des Zuges als Ausgangspunkt der Wegzählung gewählt. In diesem Falle ist

$$s_0 = 0, \qquad v_0 = 20\,\text{m/s}.$$

Gemäß dieser Bedingung hält der Zug zur Zeit $t = 20$ s. Mit den Annahmen $t = 20$ s, $v = 0$ erhält man aus der zweiten der obigen Gleichungen:

$$0 = 20 + 20\,w,$$

woraus

$$w = -1\,\text{m/s}^2$$

folgt.

Setzen wir $t = 20$ s, $w = -1$ m/s² in die erste Gleichung ein, so finden wir:

$$s = 200\,m.$$

Somit durchfährt der Zug während der Bremszeit einen Weg von 200 m.

§ 88. Einige geometrische Zusammenhänge

Bevor wir zur Definition des Begriffs der Beschleunigung im allgemeinen Falle einer beliebigen Bewegung des Punktes übergehen, wollen wir einen kleinen Abstecher in das Gebiet der Geometrie machen.

Wir stellen uns eine (im allgemeinen nicht ebene) im Raum liegende Kurve vor (Abb. 159). Wir nehmen auf der Kurve den Punkt M an und ziehen die Tangente MT. Dann wählen wir auf der Kurve einen anderen Punkt M_1 und ziehen die Tangente M_1T_1. Durch die Tangente MT legen wir eine Ebene, die parallel zu der Tangente M_1T_1 verläuft. Zu diesem Zweck legen wir durch den Punkt M die Gerade Ma, die parallel zu der Tangente M_1T_1 verläuft. Die durch die Geraden MT und Ma verlaufende Ebene ist die gesuchte. Wir werden nun den Punkt M_1 dem Punkt M annähern, wobei sich die erwähnte Ebene einer gewissen Grenzlage nähert, die *Tangentialebene der Kurve im Punkte M* genannt wird.

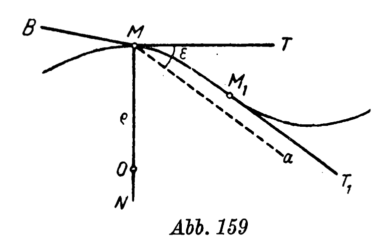


Abb. 159

Alle Geraden durch den Punkt M, die senkrecht zu der Tangente MT verlaufen, heißen *Normalen* der Kurve im Punkte M. Selbstverständlich liegen alle durch den Punkt M laufenden Normalen in einer Ebene, nämlich in der Ebene, die durch den Punkt M hindurchgeht und senkrecht zu der Tangente MT steht. Diese Ebene heißt *Normalebene* der Kurve im Punkte M. Die Normale, die in der Tangentialebene liegt, heißt *Hauptnormale*; mit anderen Worten: Die Hauptnormale ist der Schnitt der Tangentialebene mit der Normalebene. Die Normale, die senkrecht zu der Hauptnormalen verläuft, heißt *Binormale.* Es ist klar, daß die Tangente MT und die Binormale MB (Abb. 159) zueinander senkrecht stehen.

Ist die Kurve eben, so fällt die Krümmungsebene der Kurve mit der Ebene, auf der die Kurve liegt, zusammen. In diesem Falle ist unter dem Ausdruck „Normale" jene Normale zu verstehen, die in der Ebene der Kurve liegt, d. h. die Hauptnormale.

Der Winkel, der zwischen den Tangenten MT und M_1T_1, oder was dasselbe ist, zwischen der Tangente MT und der Geraden Ma, eingeschlossen ist, heißt *Kontingenzwinkel.* Er entspricht dem Bogen MM_1 und wird mit ε bezeichnet (Abb. 159). Die Länge des Bogens MM_1 bezeichnen wir mit Δs. Das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ heißt *mittlere Krümmung* des Bogens MM_1. Nähern wir den Punkt M_1 dem Punkte M oder, mit anderen Worten, lassen die Länge des Bogens Δs gegen Null gehen, so wird sich die mittlere Krümmung $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ einem bestimmten Grenzwert nähern, der die *Krümmung* der gegebenen Kurve im Punkt M heißt. Wir bezeichnen die Krümmung mit dem Buchstaben K und erhalten:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right].$$

Die Größe $\frac{1}{K}$ heißt *Krümmungsradius* der Kurve im Punkte M. Wir werden den Krümmungsradius mit dem Buchstaben ϱ bezeichnen. Folglich ist:

$$\varrho = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\varepsilon}\right].$$

Wir tragen vom Punkte M auf der Hauptnormalen MN nach der konkaven Seite der Kurve den Abschnitt $MO = \varrho$ ab. Den Punkt O nennt man den *Krümmungsmittelpunkt* der Kurve im Punkte M.

Im Fall einer ebenen Kurve kann man den Begriff des Krümmungsmittelpunktes noch auf andere Art bestimmen. Wir stellen uns eine ebene Kurve vor (Abb. 160) und nehmen auf dieser die Punkte M und M_1 an. Dann ziehen wir die Tangenten MT und M_1T_1 sowie die Normalen MN und M_1N_1. Den Schnittpunkt der Normalen bezeichnen wir mit A. Nähert sich der Punkt M_1 dem Punkte M, so nähert sich der Punkt A einer bestimmten Grenzlage. Wir wollen zeigen, daß diese Grenzlage des Punktes A nichts anderes ist, als der Krümmungsmittelpunkt der Kurve im Punkte M. Dazu genügt es, zu zeigen, daß der Grenzwert, dem sich der Abschnitt MA nähert, wenn der Punkt M_1 sich dem Punkte M nähert, gleich dem Krümmungsradius ϱ ist. Wir verbinden die Punkte M und M_1 durch eine Sehne. Die Länge dieser Sehne bezeichnen wir mit $\Delta\sigma$ und die Länge des Bogens MM_1 mit Δs. Im Dreieck MM_1A ist der Winkel am Scheitelpunkte A, der dem Winkel zwischen den Tangenten MT und M_1T_1 gleich ist, der Kontingenzwinkel ε; den Winkel am Scheitelpunkt M_1 bezeichnen wir mit α. In diesem Falle folgern wir aus dem Dreieck MM_1A

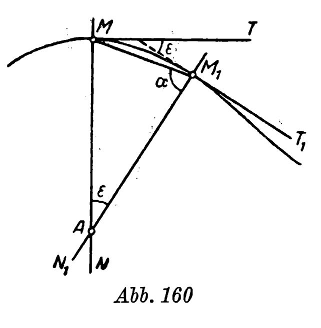


Abb. 160

$$\frac{MA}{\sin\alpha} = \frac{MM_1}{\sin\varepsilon}$$

oder

$$MA = \frac{\Delta\sigma\sin\alpha}{\sin\varepsilon}.$$

Nun suchen wir den Grenzwert des Abschnittes MA, wenn Δs gegen Null geht. Es gilt:

$$\lim_{\Delta s \to 0} [MA] = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta\sigma\sin\alpha}{\sin\varepsilon}\right] = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta\sigma\,\Delta s}{\Delta s\cdot\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin\alpha\right]$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right] \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\varepsilon}\right] \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right] \cdot \lim_{\Delta s \to 0} (\sin\alpha).$$

Hierin ist:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right]=1,\qquad \lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\Delta s}{\varepsilon}\right]=\varrho,\qquad \lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right]=1.$$

Der Grenzwert des Winkels α aber ist der Winkel zwischen der Tangente MT und der Normalen MN, d. h. $\lim\limits_{\Delta s\to 0}[\alpha]=\frac{\pi}{2}$, und folglich ist

$$\lim_{\Delta s\to 0}[\sin\alpha]=1.$$

Hieraus folgt, daß

$$\lim_{\Delta s\to 0}[MA]=1\cdot\varrho\cdot 1\cdot 1=\varrho$$

ist, d. h., der Grenzwert des Abschnittes MA ist gleich dem Krümmungsradius ϱ. Dies bedeutet, daß die Grenzlage des Punktes A der Krümmungsmittelpunkt der Kurve im Punkte M ist.

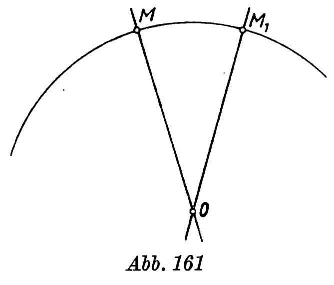


Abb. 161

Also kann man im Falle einer ebenen Kurve den Krümmungsmittelpunkt als Schnittpunkt zweier unendlich naher Normalen bestimmen.

Wir stellen uns einen Kreisbogen vom Radius R vor (Abb. 161) und betrachten auf dem Bogen zwei Punkte M und M_1. In ihnen errichten wir die Normalen zum Bogen. Diese Normalen fallen mit den Radien des Bogens zusammen und schneiden sich im Zentrum O des Bogens. Wenn wir den Punkt M_1 dem Punkte M nähern, bleibt der Schnittpunkt der Normalen unverändert. Also fällt auch seine Grenzlage, d. h. der Krümmungsmittelpunkt des Bogens, mit dem Mittelpunkt O des Bogens zusammen.

Hieraus folgt, daß der Krümmungsradius des Kreisbogens gleich dem geometrischen Radius des Bogens ist:

$$\varrho=R.$$

Alle Normalen einer geraden Linie sind parallel, d. h., ihr Schnittpunkt befindet sich im Unendlichen. Folglich befindet sich der Krümmungsmittelpunkt der geraden Linie im Unendlichen, der Krümmungsradius der geraden Linie ist unendlich groß:

$$\varrho=\infty.$$

§ 89. Die Beschleunigung einer beliebigen Bewegung

Wir kehren nun zur Definition des Begriffes der Beschleunigung im Falle einer beliebigen Bewegung des Punktes zurück.

Wir stellen uns den Punkt M vor, der irgendeine Bewegung im Raume ausführt. Zur Zeit t nimmt er die Lage M ein und besitzt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, zur Zeit $t+\Delta t$ hat er die Stellung M_1 und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ (Abb. 162). Tragen wir nun die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ vom Punkte M ab und konstruieren beim Punkte M ein

Parallelogramm, in dem die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ die Diagonale und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine Seite ist. Die zweite Seite dieses Parallelogramms, die wir mit $\Delta\mathfrak{v}$ bezeichnen, ist der Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeit Δt.

Wir teilen den Zuwachs der Geschwindigkeit $\Delta\mathfrak{v}$ durch den Zeitraum Δt. Der Vektor $\mathfrak{w}_m = \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}$ heißt die *mittlere Beschleunigung* in der Zeit Δt. Der Grenzwert, gegen den die mittlere Beschleunigung $\mathfrak{w}_m$ strebt, wenn Δt gegen Null geht, heißt die *Beschleunigung* zur Zeit t. Bezeichnen wir die Beschleunigung mit dem Buchstaben $\mathfrak{w}$, so gilt:

$$\mathfrak{w} = \lim_{\Delta t \to 0} [\mathfrak{w}_m] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}\right],$$

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ können wir als Vektorfunktion der Zeit ansehen. Erinnern wir uns an die Bestimmung der Ableitung eines Vektors, die in § 82 gegeben wurde, so schließen wir, daß

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt},$$

d. h., *die Beschleunigung ist gleich der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit.*

Abb. 162

Um Mißverständnisse zu vermeiden, muß unterstrichen werden, daß die Größe der Beschleunigung w keinesfalls gleich der Ableitung der Größe der Geschwindigkeit v nach der Zeit ist. In den §§ 90 und 91 werden zwei Wege zur Bestimmung der Größe und der Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ angegeben. Wir werden sehen, daß die Gleichung

$$w = \frac{dv}{dt}$$

nur in dem einfachsten Falle einer geradlinigen Bewegung des Punktes gültig ist.

Die Ebene des in Abb. 162 dargestellten Parallelogramms geht durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und ist der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ parallel. Folglich ist die Grenzlage dieser Ebene für $\Delta t \to 0$ die Krümmungsebene der Bewegungsbahn. Da die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ der Grenzwert der mittleren Beschleunigung $\mathfrak{w}_m$ für $\Delta t \to 0$ ist, schließen wir, daß *die Beschleunigung* $\mathfrak{w}$ *in der Krümmungsebene der Bewegungsbahn liegt.*

§ 90. Die Komponenten der Beschleunigung auf den rechtwinkligen Koordinatenachsen

Wir nehmen an, daß die Bewegung des Punktes M (Abb. 163) durch Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist,

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

und berechnen die Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf den Koordinatenachsen x, y und z.

Wir wissen, daß die Beschleunigung gleich der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit ist, d. h.

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Wenden wir die in § 42 aufgestellte Formel zur Zerlegung eines Vektors in Komponenten auf den Koordinatenachsen auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ an, so erhalten wir:

$$\mathfrak{v} = v_x \mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + v_z \mathfrak{k},$$

wobei v_x, v_y und v_z die Komponenten der Geschwindigkeit auf den Achsen x, y und z, und $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren auf diesen Achsen sind. Wir wenden zur Be-

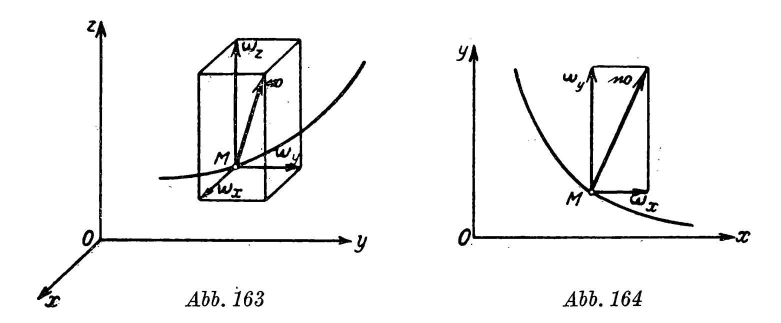


Abb. 163 *Abb. 164*

rechnung der Ableitung $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ die Regeln der Differentiation eines Vektors an, die in § 83 dargelegt wurde. Wenn wir beachten, daß die Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ konstante Größe und konstante Richtung haben, erhalten wir:

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathfrak{k}.$$

Andererseits führt die gleiche Formel zur Zerlegung in Komponenten auf den Koordinatenachsen, die auf die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ angewandt wurde, auf die Gleichung

$$\mathfrak{w} = w_x \mathfrak{i} + w_y \mathfrak{j} + w_z \mathfrak{k},$$

wobei w_x, w_y und w_z die gesuchten Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf den Achsen x, y und z sind. Vergleichen wir die beiden gewonnenen Formeln, so finden wir:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Wir wissen aber bereits, daß die Komponenten der Geschwindigkeit gleich den Ableitungen der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit sind. Setzen wir $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, so erhalten wir:

$$w_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \qquad w_y = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y},$$

$$w_z = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Also *sind die Komponenten der Beschleunigung auf den festen rechtwinkligen Koordinatenachsen gleich den zweiten Ableitungen der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit.*

Zur Berechnung der Beschleunigung benutzen wir die gewonnenen Formeln unter der Voraussetzung, daß die Bewegung durch Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist.

Wir nehmen an, die Bewegung des Punktes M sei durch folgende Bewegungsgleichungen gegeben:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

welche auf die Achsen x, y und z bezogen sind (Abb. 163).

Wir konstruieren ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel zu den Achsen x, y und z verlaufen und dessen Diagonale gleich der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ ist. Die Kanten dieses rechtwinkligen Parallelepipeds sind der Größe nach gleich den Komponenten der Beschleunigung w_x, w_y und w_z.

Wir berechnen diese Komponenten nach den Formeln:

$$w_x = \ddot{x}, \qquad w_y = \ddot{y}, \qquad w_z = \ddot{z}.$$

Darauf ermitteln wir die Größe w der Beschleunigung nach der Formel

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Ferner gilt

$$w_x = w \cos(\mathfrak{w}, x), \qquad w_y = w \cos(\mathfrak{w}, y), \qquad w_z = w \cos(\mathfrak{w}, z),$$

woraus

$$\cos(\mathfrak{w}, x) = \frac{w_x}{w}, \qquad \cos(\mathfrak{w}, y) = \frac{w_y}{w}, \qquad \cos(\mathfrak{w}, z) = \frac{w_z}{w}$$

folgt.

Durch diese Formeln ist die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ bestimmt.

Wir wollen uns mit dem Spezialfall der *ebenen Bewegung eines Punktes* beschäftigen.

Dazu nehmen wir an, daß der Punkt M (Abb. 164) eine ebene Bewegung in der x-y-Ebene ausführe. Seine Bewegung sei durch die Bewegungsgleichungen

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

gegeben.

Wir berechnen die Komponenten der Beschleunigung w_x und w_y nach den Formeln

$$w_x = \ddot{x}, \qquad w_y = \ddot{y}.$$

Darauf ermitteln wir die Größe w der Beschleunigung als Diagonale des aus den Komponenten w_x und w_y gebildeten Rechtecks:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}.$$

Die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ wird aus den Formeln

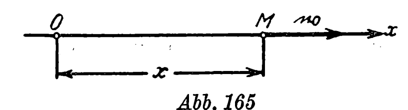


Abb. 165

$$\cos(\mathfrak{w}, x) = \frac{w_x}{w}, \qquad \cos(\mathfrak{w}, y) = \frac{w_y}{w}$$

berechnet.

Wir vermerken noch den Fall der *geradlinigen Bewegung eines Punktes.* Nehmen wir an, der Punkt M (Abb. 165) führe eine geradlinige Bewegung auf der x-Achse aus, dann ist seine Bewegung durch die Gleichung

$$x = f(t)$$

gegeben.

Wir berechnen die Komponente der Beschleunigung w_x aus der Formel

$$w_x = \ddot{x}.$$

Da die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf der x-Achse (in Richtung der x-Achse, wenn $w_x > 0$, und entgegengesetzt, wenn $w_x < 0$) verläuft, ist die Größe w der Beschleunigung gleich dem absoluten Betrage der Komponente w_x, d. h.:

$$w = |w_x|.$$

Die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ wird aber, wie soeben erwähnt, durch das Vorzeichen der Komponente w_x bestimmt.

Beispiel 31. Die Beschleunigung des Punktes M eines Ellipsographen (siehe Beispiel 25) ist zu bestimmen.

Die Bewegung des Punktes M wird durch die Gleichungen

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t$$

bestimmt.

Hieraus erhalten wir

$$w_x = \ddot{x} = -a\,\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x,$$

$$w_y = \ddot{y} = -b\,\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

Folglich ist

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{x^2 + y^2} = OM$$

(Abb. 166). Bezeichnen wir den Abschnitt OM mit r, so erhalten wir endgültig:

$$w = \omega^2 r.$$

Die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ wird nach den Formeln

$$\cos(\mathfrak{w}, x) = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos(\mathfrak{w}, y) = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}$$

ermittelt.

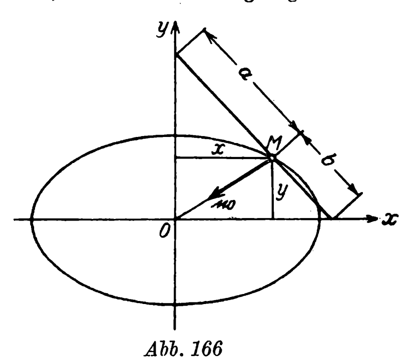


Abb. 166

Es ist leicht einzusehen (Abb. 166), daß die Richtung des Abschnittes MO (vom Punkte M nach dem Punkte O) mit den Achsen x und y Winkel bildet, deren Cosinus $-\frac{x}{r}$ und $-\frac{y}{r}$ sind. Daraus schließen wir, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ vom Punkte M nach dem Punkte O verläuft.

Somit ist die Beschleunigung des Punktes M nach dem Mittelpunkt der durch ihn beschriebenen Ellipse gerichtet und proportional dem Abstand des Punktes M von diesem Zentrum.

Beispiel 32. Es soll die Beschleunigung des Kolbens einer Dampfmaschine berechnet werden (siehe Beispiel 26).

Die Bewegung des Kolbens ist identisch mit der Bewegung des Kreuzkopfes B:

$$x = r\left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\,\omega t\right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

Differenzieren wir zweimal, so erhalten wir:

$$\dot{x} = -r\,\omega\left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\,\omega t\right)$$

$$\ddot{x} = -r\,\omega^2\left(\cos \omega t + \lambda \cos 2\,\omega t\right).$$

Hieraus folgt:

$$w_x = -r\,\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\,\omega t).$$

Die Größe w der Beschleunigung des Kreuzkopfes B ist gleich dem absoluten Betrage dieses Ausdruckes. Das Vorzeichen von w_x gibt die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ an.

Setzen wir $\omega t = \varphi$, so erhalten wir

$$w_x = -r\,\omega^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\,\varphi). \tag{1}$$

Diese Formel gibt die Abhängigkeit der Größe w_x vom Winkel φ (Abb. 167) an. Nehmen wir die gleiche Substitution $\omega t = \varphi$ in der Formel für x vor, so erhalten wir:

$$x = r\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\,\varphi\right) + l - \frac{\lambda}{4}\,r.$$

Nach dieser Formel können wir die x-Werte für beliebige gegebene Werte des Winkels φ errechnen (d. h., wir können die Lagen des Kreuzkopfes B bestimmen). Der Kreuzkopf B verschiebt sich zwischen den äußersten Lagen C und D, wo seine Geschwindigkeit Null wird. Diese Lagen werden *Totlagen* genannt. Die Abstände der Punkte C und D vom Punkte O sind gleich $1 - r$ bzw. $1 + r$. Der Abschnitt CD (Bewegung des Kreuzkopfes oder des Kolbens) ist gleich $2r$.

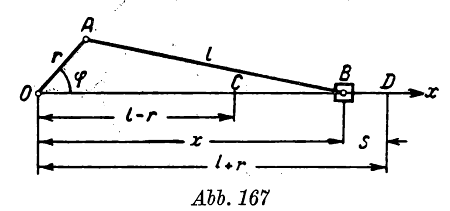


Abb. 167

Wir werden nun die Lage des Kreuzkopfes B durch seinen Abstand s von der Totlage B bestimmen. Für die Größe s erhalten wir den Ausdruck

$$s = l + r - x = r + \frac{\lambda}{4}\,r - r\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\,\varphi\right),$$

oder, wenn wir den Hub des Kolbens CD mit d bezeichnen, d. h. $2r = d$ annehmen:

$$s = \frac{d}{2}\left\{1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\left(1 - \cos 2\,\varphi\right)\right\}. \tag{2}$$

Nach den Gleichungen (1) und (2) ist es leicht, die Größen w_x und s für beliebige Werte des Winkels φ zu berechnen. In der nachfolgenden Tabelle sind die Werte der Größen

$$\frac{s}{d} = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\,\varphi)\right\},$$

$$\frac{w_x}{r\,\omega^2} = -(\cos\varphi + \lambda\cos 2\,\varphi)$$

für Winkel φ zwischen 0° und 180° in Abständen von 15° angegeben, wobei $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ angenommen ist.

Tragen wir die Größen $\frac{s}{d}$ auf der horizontalen Achse und die entsprechenden Größen $\frac{w_x}{r\,\omega^2}$ auf der vertikalen Achse ab, so erhalten wir die graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen diesen Größen (Abb. 168). Nach dieser Darstellung läßt sich Größe und Richtung der Beschleunigung für jede Lage des Kolbens leicht bestimmen, wenn die Größen r und ω gegeben sind. Die Bedeutung der Größe ω (Winkelgeschwindigkeit der Maschinenwelle) wird im Kapitel XV klargestellt werden. Die von uns angegebene graphische Darstellung spielt eine wesentliche Rolle in der Dynamik der Kolbenmaschinen (insbesondere bei der Berechnung des Schwungrades). Wir wählten $\lambda = \frac{1}{5}$; es ist leicht, eine gleiche Darstellung für jeden anderen λ-Wert anzugeben.

φ	$\frac{s}{d}$	$\frac{w_x}{r\,\omega^2}$
0°	0	− 1,200
15°	0,020	− 1,139
30°	0,079	− 0,966
45°	0,171	− 0,707
60°	0,287	− 0,400
75°	0,417	− 0,086
90°	0,550	0,200
105°	0,676	0,432
120°	0,787	0,600
135°	0,879	0,707
150°	0,945	0,766
165°	0,986	0,793
180°	1	0,800

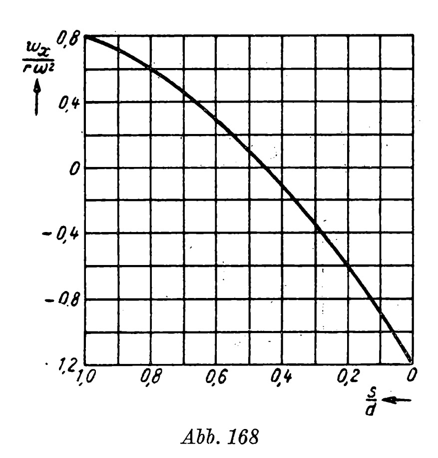


Abb. 168

§ 91. Tangential- und Normalbeschleunigung

Stellen wir uns den Punkt M vor, der irgendeine Bewegung im Raume ausführt, und bezeichnen die Beschleunigung dieses Punktes mit $\mathfrak{w}$ (Abb. 169). Wir wissen, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in der Krümmungsebene der Bewegungsbahn liegt. Wir legen in dieser Ebene eine Tangente an die Bewegungsbahn im Punkte M in Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und eine Hauptnormale an der konkaven Seite der Kurve. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ können wir in zwei Komponenten zerlegen, die auf der Tangente bzw. der Hauptnormale verlaufen. Diese Komponenten erhalten die Bezeichnung *Tangential-* und *Normalbeschleunigung*. Die absoluten Beträge der Tangential- und Normalbeschleunigung bezeichnen wir mit w_t und w_n. Wir errechnen nun diese Größen.

Dazu verwenden wir die Grundformel, die Geschwindigkeit und Beschleunigung verbindet,

$$\mathfrak{w} = \frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t},$$

und stellen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als Produkt ihres absoluten Betrages v mit dem entsprechenden Einheitsvektor dar, der die Richtung der Geschwindigkeit hat (oder, was dasselbe ist, die Richtung der Tangente an die Bewegungsbahn). Wenn wir diesen Einheitsvektor mit $\mathfrak{e}$ bezeichnen, erhalten wir:

$$\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}.$$

Hieraus ermitteln wir nach der Differentiationsregel des Produktes:

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{e} + v\frac{d\mathfrak{e}}{dt}.$$

Berechnen wir jetzt die Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$. Die den Zeiten t und $t + \Delta t$ entsprechenden Lagen unseres sich bewegenden Punktes sind M und M_1 und seine entsprechenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ (Abb. 170). Den Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}_1$. Wir tragen den Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ (mit der Richtung $\mathfrak{v}$) und $\mathfrak{e}_1$ (mit der Richtung $\mathfrak{v}_1$) vom Punkte M ab und konstruieren aus diesen Vektoren ein Dreieck. Die dritte Seite des Dreiecks (der wir die Richtung vom Ende des Vektors $\mathfrak{e}$ nach dem Ende des Vektors $\mathfrak{e}_1$ zuschreiben) ist der Zuwachs des Vektors $\mathfrak{e}$ in der Zeit Δt. Wir bezeichnen ihn mit $\Delta\mathfrak{e}$. Wir erhalten

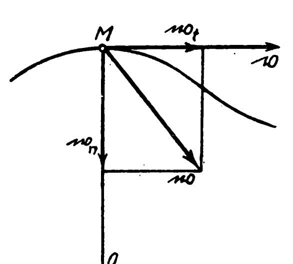


Abb. 169

$$\frac{d\mathfrak{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\mathfrak{e}}{\Delta t}\right].$$

Zur Ermittlung dieses Grenzwertes betrachten wir das beim Punkte M konstruierte Dreieck. Da die Seiten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ dieses Dreiecks parallel den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ verlaufen, ist der Winkel an der Spitze M gleich dem Winkel zwischen den Richtungen dieser Geschwindigkeiten, d. h. gleich dem Kontingenzwinkel ε, der dem Bogen der Bewegungsbahn MM_1 entspricht. Da andererseits $e = e_1 = 1$ ist, so ist unser Dreieck gleichschenklig, und die Größe seiner dritten Seite $\Delta\mathfrak{e}$ beträgt $2e\sin\frac{\varepsilon}{2} = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}$. Folglich erhalten wir, wenn wir den absoluten Betrag der Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$ mit $\left|\frac{d\mathfrak{e}}{dt}\right|$ bezeichnen:

$$\left|\frac{d\mathfrak{e}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right],$$

Druckfehlerberichtigung

Seite 19, 1. Zeile: *lies* ... des Fadens MM_1 ...

Seite 121, Formel (2): *lies*

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\Sigma(\pm F_i x_i)}{\Sigma(\pm F_i)}, \\ z_c &= \frac{\Sigma(\pm F_i z_i)}{\Sigma(\pm F_i)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Seite 210, 4. Zeile von oben: *lies* ... zur Drehachse z des Mediums

Seite 224, 3. Formel von oben: *lies* $v_d = v_a \frac{P_1 C}{P_1 A} \cdot \frac{P_2 D}{P_2 C}$.

wobei Δs die Länge des Bogens MM_1 ist. Es gilt aber

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = 1, \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\varepsilon}{\Delta s} \right] = \frac{1}{\varrho}, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = v,$$

wobei ϱ der Krümmungsradius der Bewegungsbahn im Punkte M ist. Folglich ist

$$\left| \frac{d\mathfrak{e}}{dt} \right| = \frac{v}{\varrho}.$$

Nun wollen wir die Richtung der Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$ ermitteln. Diese Richtung fällt mit der Grenzrichtung des Vektors $\Delta\mathfrak{e}$ zusammen. Wir betrachten wieder das beim Punkte M konstruierte Dreieck. Bezeichnen wir die Winkel an der Basis $\Delta\mathfrak{e}$ in diesem Dreieck mit α, so erhalten wir:

$$\varepsilon + 2\alpha = \pi,$$

woraus

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt.

Abb. 170

Wenn wir zur Grenze für $\Delta t \to 0$ übergehen und bemerken, daß $\lim_{\Delta t \to 0} [\varepsilon] = 0$ ist, schließen wir, daß $\lim_{\Delta t \to 0} [\alpha] = \frac{\pi}{2}$ ist. Folglich liegt die Grenzrichtung des Vektors $\Delta\mathfrak{e}$ senkrecht zum Vektor $\mathfrak{e}$, d. h. senkrecht zur Richtung zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Wir schließen daraus, daß die Grenzrichtung des Vektors $\Delta\mathfrak{e}$ die Richtung der Normalen zur Bewegungsbahn im Punkte M ist. Andererseits liegt der Vektor $\Delta\mathfrak{e}$ in der Ebene des aus den Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ konstruierten Dreiecks. Die Grenzlage der Ebene dieses Dreiecks ist die Grenzrichtung des Vektors $\Delta\mathfrak{e}$ und damit die Richtung jener Normalen, die in der Krümmungsebene der Bewegungsbahn liegt, d. h. die der Hauptnormalen.

Also fällt die Richtung der Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$ mit der Richtung der Hauptnormalen zur Bewegungsbahn im Punkte M zusammen.

Wir vermerken noch, daß der Zuwachs $\Delta\mathfrak{e}$ des Vektors $\mathfrak{e}$ nach der konkaven Seite der Bewegungsbahn gerichtet ist (Abb. 170). Wenn wir zur Grenze übergehen, können wir folgern, daß auch die Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$ in Richtung der Hauptnormalen nach der konkaven Seite der Bewegungsbahn, d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkt hin, verläuft.

Auf Grund des Gesagten können wir, wenn wir den Einheitsvektor, der auf der Hauptnormalen zur Bewegungsbahn in Richtung des Krümmungsmittelpunktes verläuft, mit $\mathfrak{n}$ bezeichnen, folgende Gleichung schreiben:

$$\frac{d\mathfrak{e}}{dt} = \frac{v}{\varrho}\mathfrak{n}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Ableitung $\frac{d\mathfrak{e}}{dt}$ in die oben gewonnene Formel für die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ ein, so finden wir:

$$\mathfrak{w} = \frac{dv}{dt}\cdot\mathfrak{e} + \frac{v^2}{\varrho}\mathfrak{n}.$$

Andererseits gilt, wenn wir wie oben die absoluten Beträge der Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf der Tangente und auf der Hauptnormalen mit w_t und w_n bezeichnen und für die Zerlegung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ die Zerlegungsformel des Vektors in Komponenten anwenden:

$$w = w_t\mathfrak{e} + w_n\mathfrak{n}.$$

Der Vergleich der beiden letzten Formeln führt zu der Schlußfolgerung, daß

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

ist. Durch diese Formeln werden die Größen der Tangential- und Normalbeschleunigung bestimmt. Wir erinnern nochmals daran, daß die Normalbeschleunigung auf der Hauptnormale zur Bewegungsbahn liegt und nach der konkaven Seite der Bewegungsbahn gerichtet ist, d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkt.

Man kann die erhaltenen Formeln zur Bestimmung von Größe und Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ anwenden. Zuerst berechnen wir die Tangential- und die Normalbeschleunigung nach den Formeln

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Darauf ermitteln wir die Größe der Beschleunigung w als Diagonale des aus Tangential- und Normalbeschleunigung konstruierten Rechteckes:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}\,.$$

Die Richtung der Beschleunigung aber wird nach den Formeln

$$\cos(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = \frac{w_t}{w}, \qquad \cos(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}) = \frac{w_n}{w}$$

bestimmt, wobei $(\mathfrak{w}, \mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{w}, \mathfrak{n})$ die Winkel sind, die durch die Richtung der Beschleunigung und die Richtung der Geschwindigkeit bzw. die Richtung der Hauptnormale zur Bewegungsbahn, die nach dem Krümmungsmittelpunkt verläuft, gebildet werden.

Wir stellen fest, daß bei einer geradlinigen Bewegung $\varrho = \infty$, $w_n = 0$ und folglich

$$w = |w_t| = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

ist, d. h., *bei einer geradlinigen Bewegung ist die Größe der Beschleunigung gleich dem absoluten Betrag der skalaren Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.*

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist $v = \text{const}$, $\frac{dv}{dt} = 0$ und $w_t = 0$; folglich ist

$$w = w_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Man muß besonders vermerken, daß bei einer gleichförmigen krummlinigen Bewegung die Beschleunigung nicht gleich Null ist. In diesem Falle wird nur die Tangentialbeschleunigung zu Null, so daß die Beschleunigung nur aus der Normalkomponente besteht.

Endlich ist bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung $\varrho = \infty$, $\frac{dv}{dt} = 0$, d. h. $w_t = 0$, $w_n = 0$ und folglich $w = 0$.

Beispiel 33. Ein Eisenbahnzug fährt durch eine Kurve vom Radius $R = 300$ m mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 60$ km/Std. Die Beschleunigung des Zuges ist zu bestimmen.

Ist die Bewegung des Zuges gleichförmig, so ist seine Beschleunigung der Größe nach

$$w = w_n = \frac{v^2}{R}$$

und nach dem Mittelpunkt der von ihr beschriebenen Kurve gerichtet. Es ist

$$v = 60\,\text{km/Std} = 60\,\frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{50}{3}\text{ m/s}$$

und folglich

$$w = \frac{2500}{9 \cdot 300}\text{ m/s}^2 = \frac{25}{27}\text{ m/s}^2 = 0{,}926\text{ m/s}^2.$$

Beispiel 34. Ein Eisenbahnzug durchfährt eine Kurve vom Radius $R = 300$ m mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die Länge der Kurve ist gleich $l = 200$ m, beim Einfahren in die Kurve hat der Zug die Geschwindigkeit $v_0 = 30$ km/Std, beim Ausfahren aus der Kurve beträgt seine Geschwindigkeit $v_1 = 48$ km/Std. Die Beschleunigungen des Zuges im Augenblick des Einfahrens in die Kurve und im Augenblick des Ausfahrens aus der Kurve sind zu berechnen.

Da die Bewegung des Zuges eine gleichförmig beschleunigte ist, gelten für die Geschwindigkeit v und die durchfahrene Strecke s die Formeln

$$v = v_0 + ct, \qquad s = v_0 t + \frac{ct^2}{2}$$

(in der letzten Formel haben wir den Anfangsweg s_0 gleich Null gesetzt, da wir die Zeit vom Augenblick des Einfahrens des Zuges in die Kurve an zählen). Hieraus ergibt sich

$$w_t = \frac{dv}{dt} = c.$$

Folglich ist die Tangentialbeschleunigung während der gesamten Durchfahrtszeit des Zuges durch die Kurve konstant gleich c. Die Normalbeschleunigung jedoch, die gleich $\frac{v^2}{R}$ ist, verändert sich ununterbrochen mit der Veränderung der Geschwindigkeit.

Zu den Zeiten des Einfahrens in die Kurve und des Ausfahrens aus derselben haben die Beschleunigungen des Zuges die Werte

$$w_0 = \sqrt{c^2 + \frac{v_0^4}{R^2}} \quad \text{und} \quad w_1 = \sqrt{c^2 + \frac{v_1^4}{R^2}}.$$

Nun ist noch die Konstante c zu berechnen. Bezeichnen wir die Durchfahrtszeit des Zuges durch die Kurve mit T, so erhalten wir:

$$v_1 = v_0 + cT,$$

$$l = v_0 T + \frac{cT^2}{2} = T\left(v_0 + \frac{cT}{2}\right) = \frac{1}{2c}\left[cT(2v_0 + cT)\right].$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$cT = v_1 - v_0.$$

Wenn wir diesen Wert von cT in die Formel für l einsetzen, erhalten wir:

$$l = \frac{(v_1 - v_0)(v_1 + v_0)}{2c} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2c}.$$

Hieraus folgt:

$$c = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2l}.$$

Es sind:

$$v_0 = 30\ \text{km/Std.} = \frac{25}{3}\ \text{m/s}, \qquad v_1 = 48\ \text{km/Std.} = \frac{40}{3}\ \text{m/s}$$

Folglich ist:

$$w_t = c = \frac{1600 - 625}{9 \cdot 400}\ \text{m/s}^2 = 0{,}2708\ \text{m/s}^2.$$

Ferner gilt:

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{625}{9 \cdot 300} \text{ m/s}^2 = 0{,}2315 \text{ m/s}^2,$$

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{1600}{9 \cdot 300} = 0{,}5926 \text{ m/s}^2.$$

Hieraus folgt:

$$w_0 = \sqrt{(0{,}2708)^2 + (0{,}2351)^2} \text{ m/s}^2 = 0{,}356 \text{ m/s}^2,$$

$$w_1 = \sqrt{(0{,}2708)^2 + (0{,}5926)^2} \text{ m/s}^2 = 0{,}652 \text{ m/s}^2.$$

§ 92. Graphische Darstellungen des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung

Wir nehmen an, daß die Bewegung eines Punktes durch die Bewegungsgleichung

$$s = f(t)$$

gegeben sei.

Wir können aus dieser Gleichung für jeden Zeitpunkt den dieser Zeit entsprechenden Wert des Weges s berechnen. Wir wählen zwei zueinander senkrechte Achsen (Abb. 171) und tragen auf der Abszisse die Zeit t und auf der Ordinate den entsprechenden Weg s ab. Die Gesamtheit der auf diese Art konstruierten Punkte bildet eine Kurve, die graphisch die Abhängigkeit des Weges von der Zeit darstellt. Diese Kurve wird *Weg-Zeit-Diagramm* genannt.

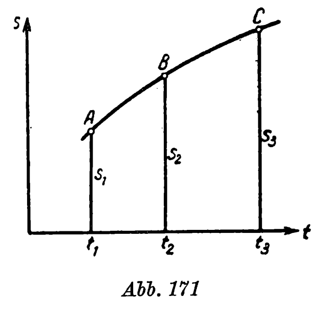


Abb. 171

Sie ist leicht zu konstruieren, wenn die Bewegungsgleichung bekannt ist. Die große Bedeutung dieser graphischen Darstellung besteht aber darin, daß man sie auch in solchen Fällen benutzen kann, in denen uns die Bewegungsgleichung, welche die analytische Abhängigkeit zwischen s und t angibt, nicht bekannt ist. Solche Fälle kommen häufig vor. Oft wird die Bewegung nur durch eine Reihe einzelner Wege $s_1, s_2, s_3, \ldots$ gegeben, denen die Zeiten $t_1, t_2, t_3, \ldots$ entsprechen, wobei die analytische Abhängigkeit zwischen s und t (d. h. die Bewegungsgleichung) unbekannt bleibt. In solchen Fällen zeichnen wir die Punkte A, B, C, ..., indem wir die Werte $t_1, t_2, t_3, \ldots$ und $s_1, s_2, s_3, \ldots$ auf den Achsen t und s abtragen (Abb. 171). Wir legen durch diese Punkte eine Kurve. Diese ist annähernd die Weg-Zeit-Kurve, die der gegebenen Bewegung entspricht. In einigen Fällen wird die Wegkurve automatisch mit Hilfe selbstschreibender, an der Bewegung teilnehmender Apparate aufgezeichnet. In jedem Falle läßt sich die Bewegungsgleichung vollständig durch die Weg-Zeit-Kurve ersetzen. Sind die Bewegungsbahn des Punktes und die Weg-Zeit-Kurve gegeben, so ist damit die Bewegung des Punktes völlig bestimmt.

Wir betrachten nun die Größe der Geschwindigkeit unseres Punktes:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit kann man auch graphisch darstellen, indem man auf der Abszisse die Zeiten t, auf der Ordinate die entsprechenden Geschwindigkeiten v abträgt. Die auf diese Art ermittelte Kurve heißt *Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm*. Die analoge Kurve, die die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit darstellt, heißt *Beschleunigung-Zeit-Diagramm.*

Es muß erwähnt werden, daß man, wenn eine der soeben beschriebenen drei Kurven bekannt ist, aus dieser gegebenen Kurve leicht die beiden anderen ermitteln kann.

Am folgenden Beispiel erläutern wir eine Näherungsmethode, der man sich dabei bedienen möge.

Beispiel 35. In Abb. 172 ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer gebremsten Fördermaschine dargestellt. Wie aus dieser Kurve ersichtlich, bewegte sich die Maschine bis zum Bremsbeginn mit einer Geschwindigkeit von 1,19 m/s. Nachdem 0,6 Sekunden lang gebremst wurde, fiel die Geschwindigkeit der Maschine bis auf Null (die Maschine bleibt stehen). Die Kurven des Weges und der Beschleunigung sollen ermittelt werden.

Wir wollen aus der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve die Werte der Geschwindigkeit v bestimmen, die den Zeiten 0,1 s; 0,2 s; . . .; 0,6 s entsprechen. Diese Werte sind in Tabelle I angegeben.

Tabelle I

t (s)	$v\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
0	1,19
0,1	1,13
0,2	1,01
0,3	0,82
0,4	0,57
0,5	0,29
0,6	0

Tabelle II

t (s)	s (m)
0	0
0,1	0,116
0,2	0,223
0,3	0,314
0,4	0,384
0,5	0,427
0,6	0,441

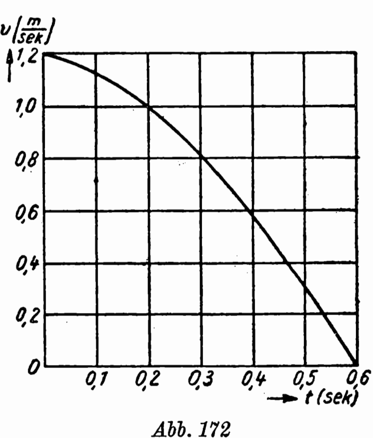


Abb. 172

Wir wenden uns nun der Konstruktion der Weg-Zeit-Kurve zu. Als Anfangspunkt, von dem aus wir den durchlaufenen Weg zählen, nehmen wir jene Stellung der Maschine an, in der sie sich bei Bremsbeginn befand. In diesem Falle ist für $t = 0$ $s_0 = 0$. Wir wollen den Wert $s = s_1$ ermitteln, der dem Augenblick $t = 0{,}1$ s entspricht. Wir werden keinen großen Fehler bei der Berechnung des durch die Maschine während der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0{,}1$ s durchlaufenen Weges machen, wenn wir annehmen, daß sich die

Maschine während dieser Zeit gleichförmig mit einer mittleren Geschwindigkeit zwischen 1,19 m/s und 1,13 m/s bewegt, d. h. mit der Geschwindigkeit

$$\frac{1{,}19 + 1{,}13}{2} = 1{,}16 \text{ m/s}.$$

Unter einer solchen Voraussetzung ist der von der Maschine in der betrachteten Zeit durchlaufene Weg, d. h. der annähernde Wert s_1 des durchlaufenen Weges bei $t = 0{,}1$ s:

$$s_1 = 1{,}16 \text{ m/s} \cdot 0{,}1 \text{ s} = 0{,}116 \text{ m}.$$

Um den Wert s_2 des durchlaufenen Weges bei $t = 0{,}2$ s zu ermitteln, berechnen wir den von der Maschine in der Zeit von $t = 0{,}1$ s bis $t = 0{,}2$ s durchlaufenen Weg. Setzen

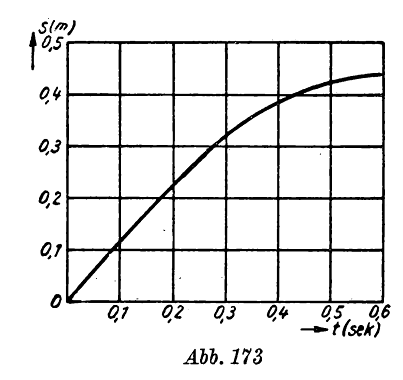


Abb. 173

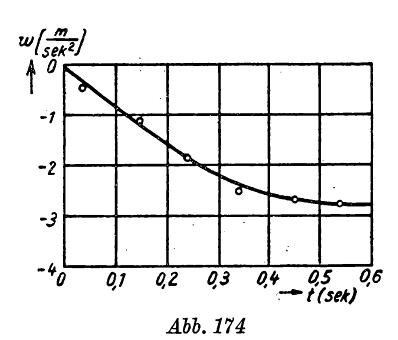


Abb. 174

wir wieder voraus, daß sich die Maschine während dieser Zeit gleichförmig mit der Geschwindigkeit

$$\frac{1{,}13 + 1{,}01}{2} \text{ m/s} = 1{,}07 \text{ m/s}$$

bewegt, so finden wir, daß in der betrachteten Zeit der Weg

$$1{,}07 \text{ m/s} \cdot 0{,}1 \text{ s} = 0{,}107 \text{ m}$$

durchlaufen ist. Folglich ist der während der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0{,}2$ s durchlaufene Weg

$$s_2 = 0{,}116 \text{ m} + 1{,}107 \text{ m} = 0{,}223 \text{ m}.$$

Indem wir so fortfahren, finden wir die Werte $s_1, s_2, \ldots, s_6$ des durchlaufenen Weges, die den Zeiten $t = 0{,}1$ s; $0{,}2$ s; ...; $0{,}6$ s entsprechen. Diese Werte sind in Tabelle II angeführt.

Wie ersichtlich, durchläuft die Maschine vom Bremsbeginn bis zum Stillstand der Maschine eine Strecke von 0,441 m. Mit Hilfe der ermittelten Wege s zeichnen wir die Weg-Zeit-Kurve (Abb. 173).

Gehen wir jetzt zur Konstruktion der Beschleunigung-Zeit-Kurve über und bestimmen zunächst die mittlere Beschleunigung der Maschine während der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0{,}1$ s. Diese mittlere Beschleunigung ist gleich

$$\frac{1{,}13 - 1{,}19}{0{,}1}\ \mathrm{m/s^2} = -0{,}6\ \mathrm{m/s^2}.$$

Tabelle III

t (s)	$w\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
0,05	– 0,6
0,15	– 1,2
0,25	– 1,9
0,35	– 2,5
0,45	– 2,8
0,55	– 2,9

Wenn wir einen kleinen Fehler zulassen wollen, können wir annehmen, daß diese Beschleunigung der Maschine zur Zeit $t = 0{,}05$ s vorhanden war. Ebenso finden wir, daß im Augenblick $t = 0{,}15$ s die Beschleunigung der Maschine (annähernd) gleich

$$\frac{1{,}01 - 1{,}13}{0{,}1}\ \mathrm{m/s^2} = -1{,}2\ \mathrm{m/s^2}$$

war. Auf diese Art finden wir die Werte der Beschleunigung der Maschine w zur Zeit 0,05 s; 0,15 s; . . .; 0,55 s. Diese Werte sind in Tabelle III aufgeführt.

Mit diesen Werten w konstruieren wir die Beschleunigung-Zeit-Kurve (Abb. 174).

KAPITEL XV

DIE FORTSCHREITENDE BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS UND SEINE ROTATION UM EINE FESTE ACHSE

§ 93. Translation eines starren Körpers

Wir studieren nun die Bewegung eines starren Körpers. Den starren Körper werden wir als einen absolut starren behandeln, d. h., wir werden voraussetzen, daß der Abstand zwischen je zwei Punkten des starren Körpers unter allen Bedingungen konstant bleibt. Unsere Untersuchung beginnen wir mit der Betrachtung der beiden einfachsten Bewegungsarten eines starren Körpers: der fortschreitenden Bewegung (Translation) und der Rotation um eine feste Achse. Später werden wir sehen, daß auch die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers auf diese beiden Arten zurückgeführt werden kann. In diesem Paragraphen wollen wir nur die fortschreitende Bewegung eines starren Körpers betrachten.

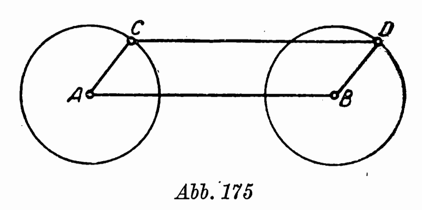


Abb. 175

Fortschreitend nennt man die Bewegung eines starren Körpers, wenn jede im Körper gezogene Gerade parallel zu sich selbst bleibt.

Stellen wir uns z. B. einen Mechanismus vor, der aus den Kurbeln AC und BD gleicher Länge besteht, die an den Wellen A und B befestigt und durch eine Stange CD miteinander verbunden sind, deren Länge gleich dem Abstand der Achsen ist (Abb. 175). Es ist klar, daß in allen Lagen des Mechanismus die Figur $ACDB$ ein Parallelogramm und die Stange CD parallel zu der Geraden AB bleibt. Folglich ist die Bewegung des Stabes CD eine fortschreitende.

Wir wollen folgende Grundeigenschaften der fortschreitenden Bewegung beweisen: Bei einer fortschreitenden Bewegung beschreiben alle Punkte des starren Körpers identische, parallele Bewegungsbahnen[1] und haben in jedem gegebenen Augenblick gleiche Geschwindigkeiten sowie gleiche Beschleunigungen.

Wir stellen uns einen starren, sich fortschreitend bewegenden Körper vor und werden beweisen, daß zwei beliebige Punkte, z. B. M und N (Abb. 177), identische und parallele Bewegungsbahnen beschreiben.

Abb. 176

Wählen wir eine Reihe aufeinanderfolgender Zeiten: t, $t + \Delta t$, $t + 2\,\Delta t$, ..., die aufeinander im Abstande Δt folgen, und vermerken die aufeinanderfolgenden Lagen M, M_1, M_2, ... und N, N_1, N_2, ... unserer beiden Punkte zu diesen Zeiten. Wenn wir durch gerade Linien die Punkte M, M_1, M_2, ... und auch die Punkte N, N_1, N_2, ... verbinden, erhalten wir zwei Polygonzüge, die den Bewegungsbahnen der Punkte M und N einbeschrieben sind.

Wir verbinden durch Geraden auch die Punkte M und N, M_1 und N_1, M_2 und N_2 usw. Die Abschnitte MN, M_1N_1, M_2N_2, ... stellen die aufeinanderfolgenden Lagen des Abschnitts MN dar, der sich zusammen mit dem starren Körper bewegt. Folglich sind alle diese Abschnitte untereinander gleich. Da die Bewegung des Körpers als fortschreitend vorausgesetzt wurde, sind alle diese Abschnitte außerdem parallel. Hieraus folgt, daß die Figuren MM_1N_1N; $M_1M_2N_2N_1$... Parallelogramme sind, und daß folglich die Abschnitte der gebrochenen Kurve entsprechend gleich und parallel sind. Somit sind diese gebrochenen Kurven identisch und parallel gelagert. Wir gehen nun zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Im Grenzfall verwandeln sich die gebrochenen Kurven MM_1M_2 ... und NN_1N_2 ... in Bewegungsbahnen der Punkte M und N. Da die gebrochenen Kurven identisch und parallel gelagert sind, so sind auch die Kurven, denen sie sich annähern, identisch und parallel.

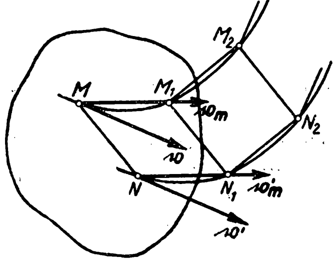


Abb. 177

Somit sind die Bewegungsbahnen der Punkte M und N identisch und parallel.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Geschwindigkeiten der Punkte M und N zur Zeit t zu.

[1] Wir nennen zwei Kurven identisch, wenn sie beim Aufeinanderlegen kongruent sind. Die beiden Punkte M und M' der beiden identischen Kurven AB und $A'B'$ (Abb. 176), die beim Übereinanderlegen der Kurven zusammenfallen, nennen wir einander entsprechend. Wir werden zwei identische Kurven parallel nennen, wenn ihre in den entsprechenden Punkten gezogenen Tangenten parallel sind.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M zur Zeit t kann man als Grenzgeschwindigkeit der gleichförmig angenommenen Bewegung längs der Sehne MM_1 während der Zeit Δt betrachten. Diese angenommene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ hat die Größe $v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}$ und verläuft längs der Sehne MM_1 (Abb. 177). Entsprechend ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ des Punktes N zur Zeit t die Grenzgeschwindigkeit von $\mathfrak{v}'_m$ bei der angenommenen gleichförmigen Bewegung auf der Sehne NN_1 während der Zeit Δt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'_m$ hat die Größe $v'_m = \frac{NN_1}{\Delta t}$ und verläuft auf der Sehne NN_1. Wir haben aber gesehen, daß die Abschnitte MM_1 und NN_1 gleich und parallel sind; folglich ist

$$\mathfrak{v}_m = \mathfrak{v}'_m .$$

Gehen wir zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über, so erhalten wir

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}',$$

d. h., die Geschwindigkeiten der Punkte M und N zur Zeit t sind gleich.

Nun sind noch die Beschleunigungen der Punkte M und N zur Zeit t zu betrachten.

Wir bezeichnen die Beschleunigungen der Punkte M und N mit $\mathfrak{w}$ bzw. $\mathfrak{w}'$. Es gilt:

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \qquad \mathfrak{w}' = \frac{d\mathfrak{v}'}{dt}.$$

Wir haben aber soeben gesehen, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$ ist. Folglich ist

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}',$$

d. h., auch die Beschleunigungen der Punkte M und N sind gleich.

Die für alle Punkte eines starren Körpers gemeinsame Geschwindigkeit und Beschleunigung können wir *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* eines starren Körpers nennen. Wir erwähnen, daß eine solche Ausdrucksweise nur im Falle einer fortschreitenden Bewegung des starren Körpers zulässig ist. In anderen Fällen der Bewegung eines starren Körpers haben (wie wir im folgenden sehen werden) die verschiedenen Punkte eines starren Körpers verschiedene Geschwindigkeiten und verschiedene Beschleunigungen.

§ 94. Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der um eine feste Achse z rotiert (Abb. 178). Die rotierende Bewegung des starren Körpers kann auf folgende Art bestimmt werden.

Wir legen durch die Rotationsachse z zwei Halbebenen[1]: die feste Halbebene P und die bewegliche Halbebene Q, die sich zusammen mit dem starren Körper dreht. Wir vermerken den Winkel zwischen diesen Halbflächen und vereinbaren, ihn

[1] Die in der Ebene gezogene Gerade teilt die unbegrenzte Ebene in zwei Halbebenen.

positiv zu rechnen, wenn er durch Drehung der festen Halbebene P im Gegenzeigersinn entsteht (für einen Beobachter, der von der Seite der positiven z-Achse blickt). Wir bezeichnen den mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen Winkel mit φ und nennen ihn *Drehwinkel.* Durch das Vorgeben des Drehwinkels φ wird die Lage der beweglichen Halbfläche Q eindeutig bestimmt und damit auch die Lage des gesamten rotierenden Körpers.

Bei der Bewegung des Körpers verändert sich der Drehwinkel φ im Laufe der Zeit, d. h., der Winkel φ wird durch irgendeine Funktion der Zeit t dargestellt:

$$\varphi = f(t).$$

Diese Gleichung heißt *Gleichung der Drehbewegung.* Durch diese Gleichung wird die rotierende Bewegung des starren Körpers eindeutig bestimmt, weil wir, wenn wir diese Gleichung kennen, für eine beliebige Zeit t den entsprechenden Wert des Drehwinkels berechnen und folglich die entsprechende Lage des rotierenden Körpers angeben können.

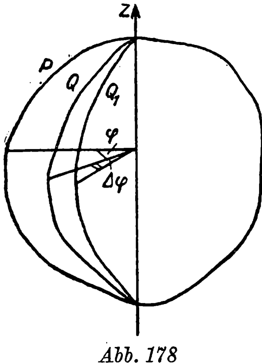


Abb. 178

Zum Charakterisieren der Drehgeschwindigkeit führen wir den Begriff der *Winkelgeschwindigkeit* ein.

Wir wählen die Zeiten t und $t + \Delta t$. Im Augenblick $t + \Delta t$ nimmt die rotierende Halbebene Q die Lage Q_1 ein, und der Drehwinkel φ erfährt während der Zeit Δt den Zuwachs $\Delta\varphi$ (Abb. 178). Das Verhältnis $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ heißt *mittlere Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers während der Zeit* Δt. Der Grenzwert aber, dem sich die mittlere Winkelgeschwindigkeit nähert, wenn Δt gegen Null geht, heißt *Winkelgeschwindigkeit des Körpers zur Zeit* t. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit mit ω, so erhalten wir:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

d. h., die *Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit.*

Wir bemerken, daß $\Delta\varphi > 0$ und folglich $\omega > 0$ ist, wenn der starre Körper im Gegenzeigersinn rotiert. Dreht sich jedoch der Körper im Uhrzeigersinn, so ist $\Delta\varphi < 0$ und folglich auch $\omega < 0$.

Wir wollen den Spezialfall der Rotation beachten, bei dem die Winkelgeschwindigkeit eine konstante Größe ist:

$$\omega = \text{const}.$$

In diesem Falle heißt die Rotation *gleichförmig.* Bei gleichförmiger Rotation gilt die Beziehung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Wenn wir integrieren und beachten, daß im gegebenen Falle ω eine konstante Größe ist, erhalten wir:

$$\varphi = \omega t + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Nehmen wir an, daß zur Zeit $t = 0$ der Drehwinkel φ den Wert φ_0 hat, so nennen wir diesen Winkel den *Anfangsdrehwinkel.* Aus der letzten Gleichung erhalten wir für $t = 0$

$$\varphi_0 = C$$

und damit endgültig:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{1}$$

Dies ist die *Gleichung der gleichförmigen Rotation.* Wir bemerken, daß man durch eine geeignete Auswahl der festen und der beweglichen Halbebene P bzw. Q stets erreichen kann, daß $\varphi_0 = 0$ ist (man braucht nur die Halbebenen P und Q so zu wählen, daß sie zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen). Also kann man, ohne die allgemeine Gültigkeit zu beschränken, die Gleichung der gleichförmigen Rotation auch in folgender Form schreiben:

$$\varphi = \omega t.$$

Wenn wir Gleichung (1) nach ω auflösen, gilt:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

d. h., *die Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Rotation ist gleich dem Verhältnis zwischen Drehwinkelzuwachs während eines gewissen Zeitraumes und Größe dieses Zeitraumes.*

Wir wollen uns eine solche gleichförmige Rotation vorstellen, bei der sich der Drehwinkel um die Einheit des Winkels in der Zeiteinheit verändert. Die Winkelgeschwindigkeit einer solchen Rotation ist gleich

$$\omega = \frac{1}{1} = 1.$$

Folglich müssen wir als *Einheit der Winkelgeschwindigkeit* die Winkelgeschwindigkeit einer gleichförmigen Rotation annehmen, bei der der Drehwinkel sich um die Einheit des Winkels in der Zeiteinheit verändert. Wenn wir z. B. vereinbaren, die Winkel durch das Verhältnis des Bogens zum entsprechenden Radius zu messen, d. h., als Winkeleinheit die ***absolute Einheit des Winkels*** oder den ***Radianten*** anzunehmen[1], und wenn wir als Zeiteinheit die Sekunde wählen, dann ist die Einheit der Winkelgeschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit einer gleichförmigen Rotation, bei

[1] Radiant heißt der Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist. Er ist gleich $57^\circ\,17'\,44{,}8''$. Wenn wir die Winkel durch das Verhältnis des Bogens zum entsprechenden Radius messen, drücken wir die Winkel in reinen Zahlen aus.

der sich der Körper um einen Radianten in einer Sekunde dreht. Diese Einheit der Winkelgeschwindigkeit werden wir *absolute Einheit der Winkelgeschwindigkeit* nennen und mit $\frac{1}{\mathrm{s}}$ bezeichnen.

Sehr häufig wird die Winkelgeschwindigkeit durch die Umdrehungszahl in der Minute ausgedrückt, d. h., als Einheit des Winkels wird eine volle Umdrehung (oder 360°) angenommen und als Zeiteinheit eine Minute. Die entsprechende Einheit der Winkelgeschwindigkeit wird mit $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$ bezeichnet.

Die Regel für den Übergang von einer Winkelgeschwindigkeitseinheit auf die andere bleibt dieselbe, wie sie in den analogen Fällen für Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes formuliert wurde: Man schreibe die gegebene Winkelgeschwindigkeit mit der zugehörigen Dimension und drücke darin die gegebenen Einheiten des Winkels und der Zeit durch die neuen Einheiten des Winkels und der Zeit aus. Nach Ausführung der Multiplikation ergibt sich das gesuchte Resultat.[1]

$$\text{Z. B.:} \qquad \omega = 100\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} = 100\,\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}} = \frac{10\,\pi}{3}\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Man bezeichnet mit dem Buchstaben n die durch die Umdrehungszahl in der Minute ausgedrückte Winkelgeschwindigkeit und benutzt den Buchstaben ω zur Bezeichnung der Winkelgeschwindigkeit, die in absoluten Einheiten ausgedrückt wird. Es gilt

$$n\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} = n \cdot \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}} = \frac{\pi n}{30}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \omega\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Der Zusammenhang zwischen der Drehzahl und der Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich durch die einfache Umrechnungsformel:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

und

$$n = \frac{30}{\pi}\,\omega \approx 9{,}55\,\omega.$$

Wir gehen nun zur Festlegung des Begriffes der Winkelbeschleunigung über. Wir wählen die Zeiten t und $t + \Delta t$. Nehmen wir an, daß zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit den Wert ω besitze und daß sie zur Zeit $t + \Delta t$ gleich $\omega + \Delta\omega$ sei. Das Verhältnis $\frac{\Delta\,\omega}{\Delta\,t}$ heißt *mittlere Winkelbeschleunigung* in der Zeit $\Delta\,t$. Der Grenzwert aber, dem sich die mittlere Winkelbeschleunigung nähert, wenn Δt gegen Null geht, heißt *Winkelbeschleunigung* zur Zeit t.

[1] Dabei muß man sich erinnern, daß eine in Radianten gemessene Umdrehung durch die Zahl $2\,\pi$ ausgedrückt wird.

Bezeichnen wir die Winkelbeschleunigung mit ε, so gilt:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right] = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

d. h., *die Winkelbeschleunigung ist gleich der ersten Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit oder gleich der zweiten Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit.* Wir bemerken, daß $\varepsilon > 0$, wenn $\Delta\omega > 0$, d. h., wenn die Winkelgeschwindigkeit in der Zeit Δt anwächst, und $\varepsilon < 0$, wenn $\Delta\omega < 0$, d. h., wenn die Winkelgeschwindigkeit abnimmt.

Wir wollen uns nun mit dem Spezialfall der Rotation befassen, bei dem die Winkelbeschleunigung eine konstante Größe ist:

$$\varepsilon = \text{const}.$$

Eine solche Rotation heißt *gleichförmig veränderlich* (gleichförmig beschleunigt oder gleichförmig verzögert). Wir stellen die Gleichung der gleichförmig veränderlichen Rotation auf.

Es gilt die Abhängigkeit

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

Integrieren wir und beachten, daß ε eine konstante Größe ist, so erhalten wir:

$$\omega = \varepsilon t + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ die Winkelgeschwindigkeit den Wert ω_0 habe, den wir *Anfangswinkelgeschwindigkeit* nennen werden. Aus der letzten Gleichung finden wir für $t = 0$:

$$\omega_0 = C.$$

Setzen wir den gefundenen Wert für die Konstante C in die vorhergehende Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2}$$

Dies ist das Gesetz der Veränderung der Winkelgeschwindigkeit bei einer gleichförmig veränderlichen Rotation.

Ferner gilt die Abhängigkeit:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Wenn wir integrieren, finden wir:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1,$$

wobei C_1 eine neue willkürliche Konstante ist. Wir bezeichnen den Anfangsdrehwinkel (d. h. den Wert des Drehwinkels φ bei $t = 0$) mit φ_0 und setzen in der letzten Gleichung $t = 0$. Dann erhalten wir

$$\varphi_0 = C_1.$$

Folglich ergibt sich endgültig:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Dies ist die *Gleichung der gleichförmig veränderlichen Rotation.*

Lösen wir Gleichung (2) nach ε auf, so finden wir:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

d. h., die Winkelbeschleunigung der gleichförmig veränderlichen Rotation ist gleich dem Verhältnis aus dem Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit während eines gewissen Zeitraums und der Größe dieses Zeitraumes.

Stellen wir uns eine gleichförmig veränderliche Rotation vor, bei der die Winkelgeschwindigkeit um eine Winkelgeschwindigkeitseinheit in jeder Zeiteinheit anwächst, so ist die Winkelbeschleunigung dieser Rotation gleich

$$\varepsilon = \frac{1}{1} = 1.$$

Folglich müssen wir als Einheit der Winkelbeschleunigung die Winkelbeschleunigung einer gleichförmig veränderlichen Rotation annehmen, bei der sich die Winkelgeschwindigkeit in einer Zeiteinheit um eine Winkelgeschwindigkeitseinheit verändert. Wenn wir als Einheiten des Winkels und der Zeit den Radianten und die Sekunde wählen, werden wir eine Einheit der Winkelbeschleunigung erhalten, die *absolute Einheit der Winkelbeschleunigung* heißt und folgende Dimension hat:

$$\frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$

Arbeiten wir mit der Drehzahl, so ist die Einheit der Drehbeschleunigung $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}^2}$.

Die Regel des Überganges von einer Einheit zur anderen bleibt dieselbe. Z. B.:

$$\varepsilon = 10\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}^2} = 10 \cdot \frac{2\,\pi}{(60\,\mathrm{s})^2} = \frac{\pi}{180}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Untersuchung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschiedener Punkte des rotierenden Körpers.

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der um eine feste Achse z rotiert, und bezeichnen einen beliebigen Punkt dieses Körpers mit M (Abb. 179). Die Bewegungsbahn des Punktes M ist der Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse z und dessen

Mittelpunkt O auf dieser Achse liegt. Der Radius dieses Kreises (oder der Abstand des Punktes M von der Drehachse) wird mit dem Buchstaben r bezeichnet. Wir wählen die feste und die bewegliche Halbebene P und Q und kennzeichnen die Radien des durch den Punkt M beschriebenen Kreises, die in diesen Halbebenen liegen. Der Radius OA, der in der Halbebene P liegt, ist unbeweglich; dagegen rotiert der in der Halbebene Q liegende Radius OB zusammen mit dem starren Körper. Der zwischen den Radien OA und OB eingeschlossene Winkel ist der Drehwinkel φ. Wenn wir vereinbaren, als Anfangspunkt der Wege s den Punkt A zu nehmen und als positive Richtung des Weges s die gleiche Richtung zu wählen, in der wir den Drehwinkel als positiv rechnen wollen, dann gilt:

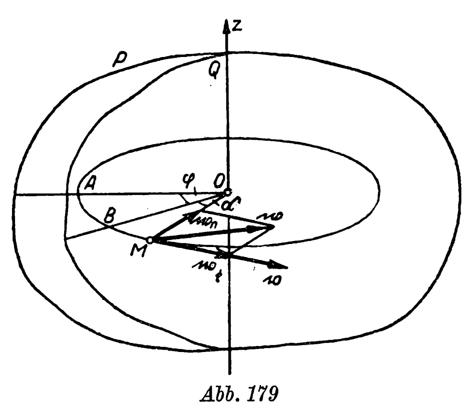


Abb. 179

$$s = r(\varphi + \alpha), \tag{3}$$

wobei α der zwischen den Radien OB und OM eingeschlossene Winkel ist. Da beide Radien OB und OM zusammen mit dem starren Körper rotieren, ist der Winkel α eine konstante Größe. Wir bemerken, daß in Formel (3) die Winkel φ und α in Radianten ausgedrückt sein müssen. Wenn wir nun die Größe v der Geschwindigkeit errechnen, finden wir:

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = r\,|\omega|. \tag{4}$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ aber ist die Richtung der Tangente an den durch den Punkt M verlaufenden Kreis. Mit anderen Worten: Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ steht senkrecht zur Ebene, die durch den Punkt M und die Drehachse z verläuft. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erhält im gegebenen Falle die Bezeichnung *Dreh-* oder *Umfangsgeschwindigkeit.* Da der Winkel φ in Formel (3) in Radianten ausgedrückt sein muß, so muß in Formel (4) die Winkelgeschwindigkeit ω in absoluten Einheiten ausgedrückt sein. Aus Formel (4) folgt, daß die Umfangsgeschwindigkeiten der verschiedenen Punkte des rotierenden Körpers proportional den entsprechenden Radien sind, d. h. proportional den Abständen der gegebenen Punkte von der Drehachse.

Beim Übergang zur Berechnung der Beschleunigung des Punktes M bedienen wir uns der Zerlegung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_t$ und die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_n$. Wenn wir beachten, daß der Krümmungsradius der Bewegungsbahn des Punktes M gleich r ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\varepsilon, \\ w_n &= \frac{v^2}{\varrho} = \frac{r^2\,\omega^2}{r} = r\,\omega^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_t$ verläuft auf der Tangente an den Kreis, der von dem Punkte M beschrieben wird. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_n$ ist gegen den Mittelpunkt O dieses Kreises gerichtet. Die Beschleunigungen $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$ erhalten im gegebenen Falle die Bezeichnungen *Drehbeschleunigung* und *Zentripetalbeschleunigung*. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ wird als Diagonale des Rechtecks ermittelt, das aus der Drehbeschleunigung und der Zentripetalbeschleunigung konstruiert ist:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{6}$$

Wir müssen beachten, daß in den Formeln (5) und (6) die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε in absoluten Einheiten ausgedrückt sind.

Wenn der Körper gleichförmig rotiert, gilt:

$$\omega = \text{const}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und folglich

$$w_t = r \cdot \varepsilon = 0.$$

Also besteht im Falle einer gleichförmigen Rotation die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M allein aus der Zentripetalkomponente, sie ist gleich

$$w = w_n = r\,\omega^2$$

und verläuft gegen den Mittelpunkt O des Kreises, der vom Punkte M beschrieben wird.

Beispiel 36. Ein Schwungrad, das sich anfangs in Ruhe befand, rotiert gleichförmig beschleunigt. Während der ersten zwei Minuten nach dem Beginn der Bewegung führt es 300 Umdrehungen aus. Es sollen die Winkelbeschleunigung des Schwungrades und seine Winkelgeschwindigkeit 3 Minuten nach dem Beginn der Bewegung bestimmt werden.

Wir benutzen die Formeln

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Im gegebenen Falle gilt $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$. Die Winkelbeschleunigung wird aus der Gleichung

$$300 = \frac{4\,\varepsilon}{2}$$

bestimmt, woraus

$$\varepsilon = 150 \text{ U/min}^2$$

folgt.

Die Drehzahl 3 Minuten nach Beginn der Bewegung ergibt sich zu

$$\omega = 150 \cdot 3 = 450 \text{ U/min}.$$

Die gefundenen Größen ε und ω, ausgedrückt in absoluten Einheiten, sind gleich

$$\varepsilon = 150 \frac{2\pi}{(60\,\mathrm{s})^2} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\mathrm{s}^2},$$

$$\omega = 450 \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}} = 15\,\pi \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Beispiel 37. Ein Schwungrad vom Radius $R = 1{,}5$ m rotiert gleichförmig mit einer Drehzahl von 90 U/min. Geschwindigkeit und Beschleunigung eines auf dem Radkranz des Schwungrades liegenden Punktes sind zu bestimmen.

Es ist:

$$\omega = 90\ \mathrm{U/min} = \frac{90 \cdot 2\,\pi}{60\,\mathrm{s}} = 3\,\pi \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$\varepsilon = \frac{d\,\omega}{d\,t} = 0\,.$$

Folglich sind:

$$v = R\,\omega = 1{,}5 \cdot 3\,\pi = 4{,}5\,\pi\ \mathrm{m/s} = 14{,}13\ \mathrm{m/s}\,,$$

$$w_t = R\,\varepsilon = 0\,,$$

$$w_n = R\,\omega^2 = 1{,}5 \cdot 9\,\pi^2 = 13{,}5\,\pi^2\ \mathrm{m/s^2} = 133{,}2\ \mathrm{m/s^2}\,,$$

$$w = w_n = 133{,}2\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Die Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verläuft auf der Tangente an dem Außenkreis des Schwungrades, die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ ist jedoch nach seinem Zentrum gerichtet.

Beispiel 38. Unter Laboratoriumsbedingungen wurde eine Winkelgeschwindigkeit von 11000 U/s gewonnen.

Als Rotor diente ein kleiner Kegel mit einem Grundflächendurchmesser $d = 1{,}17$ cm, der um seine Achse rotierte. Die Rotation wurde durch einen Luftstrom hervorgerufen und unterhalten. Die Umfangsgeschwindigkeit v und die Beschleunigung w eines Punktes auf dem Außenkreis der Kegelgrundfläche sollen berechnet werden.

Wir errechnen die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung w nach den Formeln

$$v = r\,\omega\,, \qquad w = r\,\omega^2\,.$$

Wenn wir hier

$$r = \frac{d}{2} = 0{,}585\ \mathrm{cm}\,, \qquad \omega = 11000 \cdot \frac{2\,\pi}{\mathrm{s}} = 69100 \frac{1}{\mathrm{s}} = 691 \cdot 10^2 \frac{1}{\mathrm{s}}$$

annehmen, erhalten wir:

$$v = 40400\ \mathrm{cm/s} = 404\ \mathrm{m/s}\,, \qquad w = 279 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Beispiel 39. Gegeben seien 3 Zahnräder, die gemäß Abb. 180 zusammengekuppelt sind. Die Radien der Zahnräder betragen $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 12$ cm, $r_3 = 15$ cm. Das erste Zahnrad rotiert entgegen dem Urzeigersinn mit einer Drehzahl $\omega_1 = 90$ U/min. Die Drehzahl des dritten Zahnrades soll ermittelt werden.

Da die Zahnkupplung die Möglichkeit eines Gleitens des einen Zahnrades auf dem anderen ausschließt, müssen die sich berührenden Zahnräder in den Berührungspunkten gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben. Andererseits sind auf dem Teilkreis eines jeden Zahnrades die Umfangsgeschwindigkeiten ebenfalls gleich. Hieraus folgt, daß wir auf allen drei Teilkreisen gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben. Das führt zu der Gleichung:

$$r_1\,\omega_1 = r_3 \cdot \omega_3\,, \quad \text{woraus} \quad \omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \cdot \omega_1$$

$$= \frac{20}{15} \cdot 90\ \text{U/min} = 120\text{U/min} \quad \text{folgt.}$$

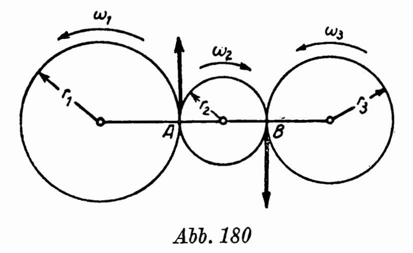


Abb. 180

Um den Rotationsdrehsinn des dritten Zahnrades zu bestimmen, kennzeichnen wir die Umfangsgeschwindigkeiten in den Berührungspunkten A und B. Da das erste Zahnrad im Gegenuhrzeigersinn rotieren soll, ist die Geschwindigkeit des Punktes A nach oben gerichtet. Damit wird die Rotationsrichtung des zweiten Zahnrades bestimmt: Dieses rotiert im Uhrzeigersinn. Hieraus folgt, daß die Geschwindigkeit des Punktes B nach unten gerichtet ist. Also rotiert das dritte Zahnrad entgegen dem Uhrzeigersinn.

KAPITEL XVI

DIE RELATIVBEWEGUNG

§ 95. Die Relativbewegung eines Punktes

Wir behalten uns die Untersuchung komplizierterer Fälle der Bewegung eines starren Körpers für die folgenden Kapitel vor und wollen uns hier mit der Theorie der Relativbewegung beschäftigen. Die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate werden wir beim weiteren Studium der Kinematik des starren Körpers benutzen.

Stellen wir uns zwei Beobachter vor, von denen der eine auf dem Deck eines sich bewegenden Dampfers sitzt, während der andere unbeweglich am Ufer steht. Nehmen wir an, daß beide Beobachter die auf dem Deck des Dampfers vor sich gehende Bewegung irgendeines Objektes verfolgen, z. B. die Bewegung eines auf dem Deck spazierenden Passagiers. Die Bewegung des Passagiers, die von dem mit dem Dampfer sich bewegenden Beobachter aufgenommen wird, werden wir „relative Bewegung" des Passagiers in bezug auf den sich bewegenden Dampfer nennen. Die Bewegung des-

selben Passagiers, die von dem unbeweglichen Beobachter am Ufer verfolgt wird, werden wir dagegen „absolute Bewegung" des Passagiers nennen.

Von diesem konkreten Beispiel gehen wir zu allgemeinen Vorstellungen über.

Unter dem Ausdruck „unveränderliches Medium" werden wir ein unbegrenztes Medium verstehen, bei dem die Abstände zwischen je zwei Punkten konstant bleiben. Wir stellen uns ein unveränderliches Medium vor, das sich auf eine beliebige Art im Raume bewegt, und zwei Beobachter, von denen der eine unbeweglich in bezug auf das Medium bleibt (d. h., seine Stellung in bezug auf die Punkte des Mediums wird nicht verändert) und sich folglich zusammen mit dem Medium bewegt, der andere aber bleibt unbeweglich im Raum.

Nehmen wir an, daß beide Beobachter die Bewegung irgendeines Punktes M verfolgen (Abb. 181). Dem Beobachter, der sich zusammen mit dem Medium bewegt, scheint es so, als beschriebe der Punkt M im Medium die Kurve K; für den unbeweglichen Beobachter aber bewegt der Punkt sich auf der Kurve P.

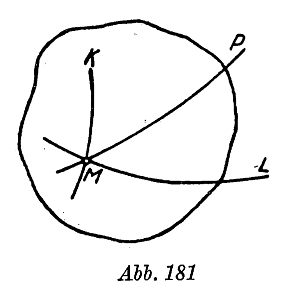


Abb. 181

Die Bewegung des Punktes M, die von dem zusammen mit dem Medium sich bewegenden Beobachter verfolgt wird, heißt *Relativbewegung* des Punktes M in bezug auf das Medium; die Bewegung des Punktes M aber, die von dem unbeweglichen Beobachter verfolgt wird, heißt seine *absolute Bewegung*.

Die Kurve K, die vom Punkte M bei seiner Relativbewegung beschrieben wird, heißt seine *Relativ-Bewegungsbahn*; die Kurve P jedoch, auf der sich der Punkt M absolut bewegt, heißt seine *absolute Bewegungsbahn*. Die Relativ-Bewegungsbahn K kann man als geometrischen Ort der Punkte des Mediums bestimmen, mit denen in aufeinanderfolgenden Zeiten der sich bewegende Punkt M zusammenfällt. Die absolute Bewegungsbahn P aber ist der geometrische Ort der Punkte des unbeweglichen Raumes, mit denen in aufeinanderfolgenden Zeiten der Punkt M zusammenfällt. Die Relativ-Bewegungsbahn bewegt sich im Raume zusammen mit dem Medium, die absolute Bewegungsbahn P dagegen ist eine unbewegliche Kurve.

Wir werden die Bewegung des Punktes M zusammen mit dem unveränderlichen Medium die übertragene Bewegung des Punktes M nennen. Bei der Bewegung des Mediums beschreibt jeder seiner Punkte irgendeine Bewegungsbahn. Wir vermerken insbesondere die Bewegungsbahn L (Abb. 181), die von dem Punkte des Mediums beschrieben wird, mit dem im gegebenen Zeitpunkt der Punkt M zusammenfällt. Wenn der Punkt M keine Relativbewegung in bezug auf das Medium ausführen würde, ginge seine absolute Bewegung auf der Kurve L vor sich. Die Kurve L heißt *übertragene Bewegungsbahn* des Punktes M im gegebenen Augenblick.

Wir werden zeigen, daß man die absolute Bewegung des Punktes bestimmen kann, wenn man die Relativ-Bewegung und ebenso die übertragene Bewegung eines Punktes kennt.

Stellen wir uns das unveränderliche Medium und den sich in demselben bewegenden Punkt M vor (Abb. 182). Wir betrachten eine Reihe aufeinanderfolgender Zeiten t,

$t + \Delta t$, $t + 2\,\Delta t$, ... Wir nehmen an, daß zur Zeit t das Medium und der Punkt M die in der Abbildung angegebenen Stellungen einnehmen, und vermerken die Relativ-Bewegungsbahn K und die Bewegungsbahn L, die von jenem Punkte des Mediums beschrieben wird, mit dem der Punkt M zur Zeit t zusammenfällt.

Um die Stellung, die der Punkt M zur Zeit $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, ... in seiner absoluten Bewegung einnimmt, zu konstruieren, verfahren wir auf folgende Weise:

Wir bezeichnen auf der Relativ-Bewegungsbahn K die Stellung M_1, die von dem Punkte M zur Zeit $t + \Delta t$ eingenommen wird, und auf der Bewegungsbahn L die Stellung M', die zu derselben Zeit vom gleichen Punkte des Mediums, der mit dem Punkt M zur Zeit t zusammenfällt, eingenommen wird. Wir vermerken ebenfalls die Stellung K', die die Relativ-Bewegungsbahn K (die sich zusammen mit dem Medium bewegt) zur Zeit $t + \Delta\, t$ einnimmt. Wenn wir auf der Kurve K' vom Punkte M' den Bogen $M'M'_1$ abtragen, der gleich dem Bogen MM_1 ist, erhalten wir die Stellung M'_1, die vom Punkte M zur Zeit $t + \Delta\, t$ bei seiner absoluten Bewegung eingenommen wird. Ganz entsprechend kann auch die Stellung M''_2 ermittelt werden, die der Punkt M in seiner absoluten Bewegung zur Zeit $t + 2\,\Delta\, t$ eingenommen hat, usw. Der geometrische Ort der Punkte M, M'_1, M''_2, ... ist die absolute Bewegungsbahn P.

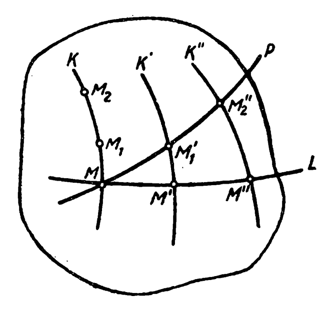


Abb. 182

Wenn man also die Relativ-Bewegung des Punktes und seine übertragene Bewegung kennt, kann man die absolute Bewegungsbahn konstruieren und die Lage des Punktes auf seiner absoluten Bewegungsbahn zu einer beliebigen Zeit angeben.

Die soeben dargelegte Methode, mit deren Hilfe die absolute Bewegung des Punktes aus der gegebenen Relativ- und Übertragungsbewegung bestimmt wird, heißt *Addition der Bewegungen*, der Relativ- und Übertragungsbewegung. Die *absolute Bewegung* heißt die aus der Relativ- und Übertragungsbewegung zusammengesetzte Bewegung. Die Relativ- und die Übertragungsbewegung werden die Komponenten der Bewegung genannt. Die umgekehrte Methode, bei der die zusammengesetzte Bewegung durch zwei Bewegungskomponenten ersetzt wird, heißt *Zerlegung der gegebenen Bewegung* in zwei Bewegungskomponenten.

Wir haben die Bewegung eines Punktes, die vom unbeweglichen Beobachter verfolgt wird, Absolutbewegung genannt. Wir sagen, daß der Punkt eine absolute Bewegung ausführt, wenn seine Lage sich im Laufe der Zeit in bezug auf die absolut unbeweglichen Körper verändert. Wie aber soll man die absolute Unbeweglichkeit dieses Körpers beurteilen? Wir kommen hier zu der Frage, ob ein absolut unbeweglicher Raum existiert. Wenn wir im Gebiet der Kinematik bleiben, können wir diese Frage nicht beantworten, ein Weg zu ihrer Lösung erschließt sich jedoch in der Dynamik. Vom Gesichtspunkt der Kinematik ist jede Bewegung eine Relativbewegung. Nichtsdestoweniger werden wir den Ausdruck „absolute Bewegung" im weiteren bei-

behalten und vereinbaren, unter dieser Bezeichnung jene Bewegung zu verstehen, die von einem auf der Erdoberfläche befindlichen unbeweglichen Beobachter verfolgt wird. Streng genommen müßte diese Bewegung Relativbewegung in bezug auf die Erde genannt werden. Die Gründe für die Wahl der Bezeichnung „absolute Bewegung“ für die oben erwähnte Bewegung werden bei den Betrachtungen der Dynamik dargelegt werden.

§ 96. Die Gleichungen der relativen Bewegung, der relativen Geschwindigkeit und der relativen Beschleunigung

Bei der Untersuchung der Relativbewegung eines Punktes können wir alle Methoden anwenden, mit deren Hilfe wir in den ersten drei Kapiteln dieses Bandes die absolute Bewegung des Punktes erforscht haben.

Stellen wir uns ein unveränderliches Medium vor, das eine translative Bewegung im Raume ausführt, und den Punkt M, der eine Relativbewegung in bezug auf das Medium ausführt (Abb. 183). Die Relativbewegung des Punktes M kann durch das Vorgeben der relativen Bewegungsbahn K und der Bewegungsgleichung

$$s_r = f(t)$$

bestimmt werden, wobei s_r der in der Relativbewegung zurückgelegte Weg auf der relativen Bewegungsbahn von irgendeinem willkürlich gewählten Anfang O aus ist. Die soeben aufgeschriebene Gleichung werden wir *Gleichung der Relativbewegung* nennen.

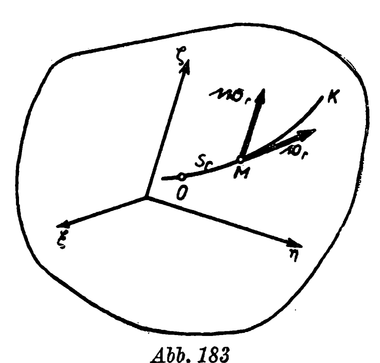


Abb. 183

Zur Bestimmung der Relativbewegung kann man auch die Koordinatenmethode benutzen. Wir nehmen drei zueinander senkrechte Koordinatenachsen ξ, η und ζ an, die mit dem Medium verbunden sind und sich folglich zusammen mit dem Medium bewegen. Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M in bezug auf diese Achsen mit den Buchstaben ξ, η und ζ (wir werden diese Koordinaten *relative Koordinaten* des Punktes M nennen) und erhalten dann:

$$\xi = f_1(t), \qquad \eta = f_2(t), \qquad \zeta = f_3(t).$$

Mit diesen Gleichungen, die wir *Gleichungen der Relativbewegung* in rechtwinkligen Koordinaten nennen wollen, ist die Relativbewegung des Punktes M eindeutig bestimmt.

Die Geschwindigkeit des Punktes M bei seiner Relativbewegung werden wir *relative Geschwindigkeit* nennen und mit $\mathfrak{v}_r$ bezeichnen. Es ist

$$v_r = \left| \frac{d s_r}{d t} \right|.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ ist die Richtung der Tangente an die relative Bewegungsbahn, die nach der Seite der Bewegung gezogen ist. Wenn wir die Projektionen der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ auf die Achsen ξ, η und ζ mit $v_{r\xi}$, $v_{r\eta}$ und $v_{r\zeta}$ bezeichnen, erhalten wir

$$v_{r\xi} = \dot{\xi}, \qquad v_{r\eta} = \dot{\eta}, \qquad v_{r\zeta} = \dot{\zeta}.$$

Die Beschleunigung des Punktes M in seiner Relativbewegung werden wir seine *relative Beschleunigung* nennen und mit $\mathfrak{w}_r$ bezeichnen. Die Projektionen $w_{r\xi}$, $w_{r\eta}$ und $w_{r\zeta}$ dieser Beschleunigung auf die Achsen ξ, η und ζ werden nach den Formeln

$$w_{r\xi} = \ddot{\xi}, \qquad w_{r\eta} = \ddot{\eta}, \qquad w_{r\zeta} = \ddot{\zeta}$$

bestimmt.

Überhaupt bleiben alle in den Kapiteln XII bis XIV festgestellten Resultate auch bei der Anwendung auf die Relativbewegung richtig.

Wir haben soeben die Koordinatenachsen ξ, η und ζ eingeführt, die mit dem Medium verbunden sind und sich zusammen mit diesem bewegen. Häufig spricht man anstatt von der relativen Bewegung „in bezug auf das sich bewegende unveränderliche Medium" von der Relativbewegung „in bezug auf das bewegliche Koordinatensystem ξ, η und ζ". Die Bewegung des Punktes zusammen mit den Achsen ξ, η und ζ erhält in diesem Fall die Bezeichnung translative Bewegung.

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes M bei seiner absoluten Bewegung vereinbaren wir, seine *absolute Geschwindigkeit* bzw. seine *absolute Beschleunigung* zu nennen. Unsere nächste Aufgabe wird sein, die Abhängigkeit zwischen der relativen Geschwindigkeit des Punktes und seiner absoluten Geschwindigkeit und ebenso auch die zwischen der relativen Beschleunigung und der absoluten Beschleunigung festzustellen. Diese Abhängigkeiten sind durch den Satz von der Addition der Geschwindigkeiten und durch den Satz von der Addition der Beschleunigungen gegeben.

§ 97. Das Theorem der elementaren Verrückung eines Punktes. Die Deviation

Bevor wir die beiden am Ende des vorigen Paragraphen erwähnten wichtigen Theoreme betrachten, wollen wir einen Hilfssatz aufstellen, der die elementare Verrückung eines Punktes betrifft. Wir werden diesen Satz dann beim Aufstellen der uns interessierenden Theoreme benutzen.

Stellen wir uns den Punkt M vor, der irgendeine (absolute oder relative) Bewegung ausführt, die durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

bezogen auf die Achsen x, y und z, bestimmt ist (Abb. 184).

Wir nehmen an, daß der sich bewegende Punkt zur Zeit t die in der Abbildung mit dem Buchstaben M bezeichnete Lage einnimmt und zu dieser Zeit die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ besitzt. Zur Zeit $t + \Delta t$ nimmt der Punkt die Lage M_1 ein, da er während der Zeit Δt den Bogen MM_1 durchläuft.

Wir ziehen die Radiusvektoren $\overline{OM} = \mathfrak{r}$ und $\overline{OM_1} = \mathfrak{r}_1$. Der Vektor $\overline{MM_1}$ ist der Zuwachs $\Delta\mathfrak{r}$ des Radiusvektors unseres sich bewegenden Punktes während der Zeit Δt; wir werden diesen Vektor die elementare Verrückung des Punktes M während der Zeit Δt nennen. Wir betrachten den Zeitraum Δt als kleine Größe erster Ordnung und wollen die elementare Verrückung $\Delta\mathfrak{r}$ in eine unendliche Reihe nach den Potenzen dieser kleinen Größe entwickeln.

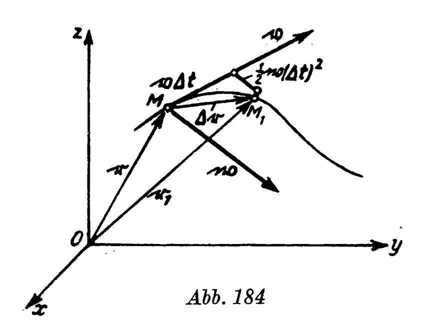


Abb. 184

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M mit x, y und z, die Koordinaten des Punktes M_1 mit x_1, y_1 und z_1. Die Projektionen des Vektors $\Delta\mathfrak{r}$ auf die Achsen x, y und z sind gleich den Differenzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Wir bezeichnen diese Differenzen mit Δx, Δy und Δz. Es gilt:

$$x = f_1(t), \qquad x_1 = f_1(t + \Delta t).$$

Wir entwickeln die Größe x_1 in eine TAYLOR-Reihe nach Potenzen der kleinen Größe Δt:

$$x_1 = f_1(t) + f_1'(t)\cdot \Delta t + \frac{1}{2} f_1''(t)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t)(\Delta t)^3 + \cdots.$$

Beachten wir, daß

$$f_1(t) = x, \qquad f_1'(t) = v_x, \qquad f_1''(t) = w_x$$

ist, wobei v_x und w_x die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf der x-Achse sind, so erhalten wir:

$$x_1 = x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t)(\Delta t)^3 + \cdots,$$

woraus (indem wir $f_1'''(t) = x'''$ setzen)

$$\Delta x = v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} x'''(\Delta t)^3 + \cdots$$

folgt. Analog finden wir:

$$\Delta y = v_y \Delta t + \frac{1}{2} w_y (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} y'''(\Delta t)^3 + \cdots,$$

$$\Delta z = v_z \Delta t + \frac{1}{2} w_z (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} z'''(\Delta t)^3 + \cdots.$$

Wenden wir nun auf die elementare Verrückung $\Delta\mathfrak{r}$ die Zerlegungsformel in Komponenten auf den Achsen x, y und z an. Wenn wir die Einheitsvektoren, die auf den Achsen x, y und z verlaufen, wie stets mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ bezeichnen und beachten, daß die Komponenten des Vektors $\Delta\mathfrak{r}$ auf diesen Achsen gleich Δx, Δy, Δz sind, erhalten wir:

$$\Delta\mathfrak{r} = \Delta x\cdot\mathfrak{i} + \Delta y\cdot\mathfrak{j} + \Delta z\cdot\mathfrak{k}.$$

Substituieren wir hier die gefundenen Entwicklungen der Größen Δx, Δy und Δz, so ergibt sich:

$$\Delta\mathfrak{r} = (v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k})\Delta t + \frac{1}{2}(w_x\mathfrak{i} + w_y\mathfrak{j} + w_z\mathfrak{k})(\Delta t)^2 + + \frac{1}{6}(x'''\mathfrak{i} + y'''\mathfrak{j} + z'''\mathfrak{k})(\Delta t)^3 + \cdots .$$

Es gilt aber, wenn wir die Zerlegungsformel in Komponenten auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ anwenden:

$$v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k} = \mathfrak{v},$$

$$w_x\mathfrak{i} + w_y\mathfrak{j} + w_z\mathfrak{k} = \mathfrak{w}.$$

Wir führen nun einen neuen Vektor $\dot{\mathfrak{w}}$ ein, dessen Komponenten auf den Achsen x, y und z gleich den dritten Ableitungen der Koordinaten x, y und z nach der Zeit sind (dieser Vektor $\dot{\mathfrak{w}}$ heißt Beschleunigung zweiter Ordnung). In diesem Fall erhalten wir:

$$x'''\mathfrak{i} + y'''\mathfrak{j} + z'''\mathfrak{k} = \dot{\mathfrak{w}}.$$

Also ist:

$$\Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\mathfrak{w}(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\dot{\mathfrak{w}}(\Delta t)^3 + \cdots.$$

Dies ist die gesuchte Entwicklung der elementaren Verrückung $\Delta\mathfrak{r}$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen der kleinen Größe Δt. Hier sind die drei ersten Glieder dieser Entwicklung aufgeschrieben; in den weiteren Gliedern der Reihe sind Vektoren enthalten, deren Komponenten auf den Achsen x, y und z gleich den vierten, fünften usw. Ableitungen der Koordinaten x, y und z nach der Zeit sind. Alle diese Vektoren erhalten den Namen Beschleunigungen dritter, vierter usw. Ordnung.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\frac{1}{2}\mathfrak{w}(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\dot{\mathfrak{w}}(\Delta t)^3 + \cdots = \mathfrak{a}_2,$$

$$\frac{1}{6}\dot{\mathfrak{w}}(\Delta t)^3 + \cdots = \mathfrak{a}_3$$

ein.

Hierin sind $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ kleine Vektoren zweiter bzw. dritter Ordnung. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

$$\Delta \mathfrak{r} = \mathfrak{v} \Delta t + \mathfrak{a}_2, \tag{2}$$

$$\Delta \mathfrak{r} = \mathfrak{v} \Delta t + \frac{1}{2} \mathfrak{w} (\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3. \tag{3}$$

Diese Formeln werden wir beim Aufstellen der Additionstheoreme der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen benötigen. Aus den gewonnenen Formeln ist ersichtlich, daß mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen erster Ordnung (einschließlich), d. h. unter Vernachlässigung von Größen zweiter und höherer Ordnungen, die elementare Verrückung $\overline{MM_1}$ mit dem Vektor $\mathfrak{v} \cdot \Delta t$, der in Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ abgetragen ist, zusammenfällt (Abb. 184). Mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen zweiter Ordnung (d. h., wenn wir nur die kleinen Größen dritter und höherer Ordnungen vernachlässigen) müssen wir die elementare Verrückung als aus den Vektoren $\mathfrak{v} \Delta t$ und $\frac{1}{2} \mathfrak{w} (\Delta t)^2$ zusammengesetzt annehmen. Der Vektor $\frac{1}{2} \mathfrak{w} (\Delta t)^2$, der die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ hat, heißt *Deviation.*

§ 98. Die Addition von Geschwindigkeiten

Wir stellen uns ein unveränderliches Medium und einen sich in diesem bewegenden Punkt M vor (Abb. 185). Zur Zeit t nehmen das Medium und der Punkt M jene Stellung ein, die in der Abbildung angegeben ist. Wir vermerken die relative Bewegungs-

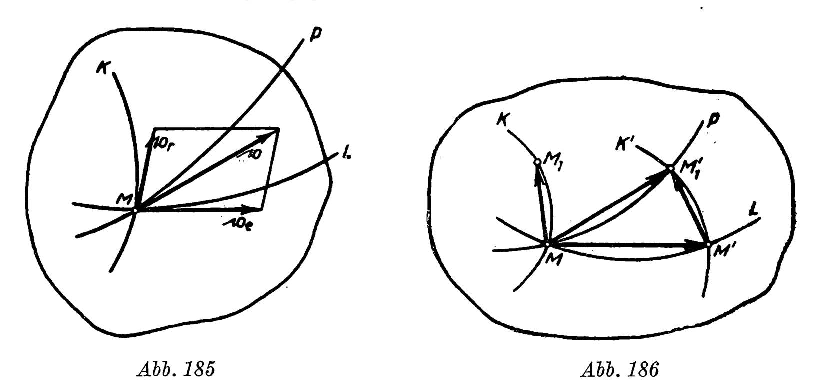


Abb. 185 *Abb. 186*

bahn K, die absolute Bewegungsbahn P und die Bewegungsbahn L, die von dem Punkt des Mediums beschrieben werden, der zur Zeit t mit dem Punkt M zusammenfällt.

Zur Zeit t besitzt der Punkt M die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Wir vermerken noch die Geschwindigkeit des Punktes des

Mediums, mit dem der Punkt M im gegebenen Augenblick zusammenfällt. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}_e$ und nennen sie *translative Geschwindigkeit.* Diese Geschwindigkeit verläuft auf der Tangente an die Kurve L.

Wir werden zeigen, daß die absolute Geschwindigkeit gleich der Vektorensumme aus der translativen und der relativen Geschwindigkeit ist. Darin besteht das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Um dieses Theorem zu beweisen, wollen wir die Lage des Punktes M zur Zeit $t + \Delta t$ konstruieren (Abb. 186). Wir vermerken die von dem Punkte M zur Zeit $t + \Delta t$ eingenommene Lage M_1 auf der relativen Bewegungsbahn K und die Lage M', die zur gleichen Zeit der Punkt des die Kurve L beschreibenden Mediums einnimmt. Wir vermerken ebenfalls die verrückte Lage der relativen Bewegungsbahn, die während der Zeit Δt zusammen mit dem Medium in die Lage K' gerückt ist. Nachdem wir auf der Kurve K' vom Punkte M' den Bogen $M'M_1'$ abgetragen haben, der gleich MM_1 ist, erhalten wir die Lage M_1', die der Punkt M zur Zeit $t + \Delta t$ in seiner absoluten Bewegung einnimmt.

Wir ziehen nun die Sehnen MM_1, MM_1', MM' und $M'M_1'$ (Abb. 186). Die Vektoren $\overline{MM_1'}$, $\overline{MM_1}$ und $\overline{MM'}$ sind die elementaren Verrückungen des Punktes M während der Zeit Δt bei seiner absoluten, relativen und translativen Bewegung. Der Vektor $\overline{M'M_1'}$ ist der Größe nach gleich der elementaren Verrückung $\overline{MM_1}$ in der relativen Bewegung des Punktes. Man kann sagen, daß der Vektor $\overline{M'M_1'}$ die elementare Verrückung bei der Relativbewegung ist, die während der Zeit Δt zusammen mit der relativen Bewegungsbahn K in eine neue Lage verlegt wurde, die der Zeit $t + \Delta t$ entspricht.

Wir werden den Zeitraum Δt als eine kleine Größe erster Ordnung ansehen. Auf Grund der im vorigen Paragraphen aufgestellten Formel (1) erhalten wir:

$$\overline{MM_1'} = \mathfrak{v}\,\Delta t + \mathfrak{a}_2,$$

$$\overline{MM_1} = \mathfrak{v}_r\,\Delta t + \mathfrak{b}_2,$$

$$\overline{MM'} = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \mathfrak{c}_2,$$

wobei $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{c}_2$ kleine Vektoren zweiter Ordnung sind. Für die Verrückung $\overline{M'M_1'}$ werden wir, wenn wir die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und den Abschnitt $\mathfrak{b}_2$, die zusammen mit der relativen Bewegungsbahn K in eine neue, der Zeit $t + \Delta t$ entsprechende, Lage gerückt sind, mit $\mathfrak{v}_r'$ und $\mathfrak{b}_2'$ bezeichnen (die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r'$ ist der Größe nach gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$, verläuft aber nicht auf der Tangente an die Bewegungsbahn K im Punkte M, sondern auf der Tangente an die Bewegungsbahn K' im Punkte M'), erhalten:

$$\overline{M'M_1'} = \mathfrak{v}_r'\,\Delta t + \mathfrak{b}_2'.$$

Andererseits schließen wir aus $\triangle MM'M_1'$, daß die Verrückung $\overline{MM_1'}$ die Summe der Verrückungen $\overline{MM'}$ und $\overline{M'M_1'}$ ist, d. h.

$$\overline{MM_1'} = \overline{MM'} + \overline{M'M_1'}.$$

Setzen wir die Werte für die Verrückungen ein, so finden wir

$$\mathfrak{v}\,\varDelta t + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{v}_e\,\varDelta t + \mathfrak{c}_2 + \mathfrak{v}'_r\,\varDelta t + \mathfrak{b}'_2$$

oder

$$\mathfrak{v}\,\varDelta t = \mathfrak{v}_e\,\varDelta t + \mathfrak{v}'_r\,\varDelta t + \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{b}'_2 - \mathfrak{a}_2 .$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{b}'_2 - \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{k}_2 ,$$

wobei $\mathfrak{k}_2$ ein Vektor zweiter Ordnung ist. Mit dieser Abkürzung erhalten wir:

$$\mathfrak{v}\,\varDelta t = \mathfrak{v}_e\,\varDelta t + \mathfrak{v}'_r\,\varDelta t + \mathfrak{k}_2 .$$

Wir dividieren nun beide Seiten dieser Gleichung durch $\varDelta t$ und bezeichnen den Vektor $\mathfrak{k}_2$ dividiert durch $\varDelta t$ mit $\mathfrak{k}_1$. Dies ist ein Vektor erster Ordnung. Folglich ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e + \mathfrak{v}'_r + \mathfrak{k}_1 .$$

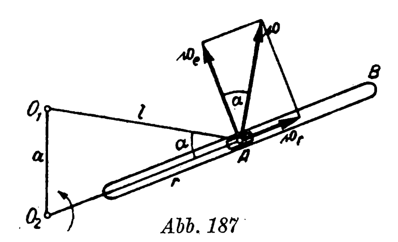


Abb. 187

Nun muß noch der Grenzübergang für $\varDelta t \to 0$ betrachtet werden.

Da

$$\lim_{\varDelta t \to 0} [\mathfrak{v}'_r] = \mathfrak{v}_r , \qquad \lim_{\varDelta t \to 0} [\mathfrak{k}_1] = 0$$

ist, ergibt sich als Grenzwert

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e + \mathfrak{v}_r ,$$

d. h., die absolute Geschwindigkeit ist gleich der Vektorensumme der translativen und der relativen Geschwindigkeit.

Mit anderen Worten, die *absolute Geschwindigkeit ist die Diagonale eines aus der translativen und der relativen Geschwindigkeit konstruierten Parallelogramms* (Abb. 185). Das soeben erwähnte Parallelogramm heißt *Geschwindigkeitsparallelogramm.*

Beispiel 40. Am Ende der um die feste Achse O_1 rotierenden Kurbel O_1A befindet sich ein Gleitstück, das längs der Kulisse O_2B gleitet. Diese rotiert um die feste Achse O_2 (Abb. 187); $O_1A = l$, $O_1O_2 = a$, wobei $l > a$. Die Kurbel O_1A rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, die Winkelgeschwindigkeit der Kulisse O_2B soll gefunden werden.

Wir bezeichnen die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Kulisse O_2B mit ω_2. Wir werden diese Winkelgeschwindigkeit ω_2 finden, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit irgendeines Punktes der Kulisse O_2B kennen. Wir wollen die Rotationsgeschwindigkeit jenes Punktes der Kulisse ermitteln, mit dem im gegebenen Augenblick das Kurbelende A zusammenfällt. Zu diesem Zweck werden wir die absolute Bewegung des Punktes A aus der Bewegung zusammen mit der Kulisse O_2B und der Relativbewegung in bezug auf diese Kulisse zusammensetzen. Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes A ist uns bekannt: das ist die Rotationsgeschwindigkeit um die Achse O_1, folglich ist ihre Größe gleich

$$v = l\,\omega_1 ,$$

und sie verläuft senkrecht zur Kurbel O_1A. Uns interessiert die translative Geschwindigkeit des Punktes A. Wir konstruieren ein Geschwindigkeitsparallelogramm, wobei wir bemerken, daß die translative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ des Punktes A (der um die Achse O_2 rotiert) senkrecht zur Kulisse O_2B steht und die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ auf der Tangente zur relativen Bewegungsbahn verlaufen muß, d. h. längs der Geraden O_2B.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_e$ mit α, so folgern wir aus dem Geschwindigkeitsparallelogramm:

$$v_e = v \cos \alpha = l\,\omega_1 \cos \alpha .$$

Da aber die translative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ um die Achse O_2 rotiert, gilt

$$v_e = r\,\omega_2 ,$$

wobei mit dem Buchstaben r der veränderliche Abstand O_2A bezeichnet ist. Folglich ist:

$$\omega_2 = \frac{v_e}{r} = \frac{l\,\omega_1 \cos \alpha}{r} .$$

Wir drücken nun $\cos \alpha$ durch die variable Größe r aus. Dabei stellen wir fest, daß im Dreieck O_1AO_2 der Winkel an der Spitze A gleich α ist, folglich gilt:

$$a^2 = l^2 + r^2 - 2\,l r \cos \alpha ,$$

woraus

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + r^2 - a^2}{2\,l r} = \frac{r}{2\,l}\left(l + \frac{l^2 - a^2}{r^2}\right)$$

folgt.

Endgültig erhalten wir:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{r^2}\right).$$

Hieraus ist zu ersehen, daß für $\omega_1 = \text{const}$, d. h. bei gleichförmiger Rotation der Kurbel O_1A, ω_2 eine variable Größe ist, d. h. die Kulisse O_2B ungleichförmig rotiert. Wir stellen dem Leser anheim, $\omega_{2\,\max}$ und $\omega_{2\,\min}$ zu ermitteln und auch jene Stellungen des Mechanismus zu bestimmen, bei denen $\omega_2 = \omega_1$ ist.

§ 99. Die Addition der Beschleunigungen im Falle translativer Bewegung

Wir stellen uns ein unveränderliches Medium, das eine beliebige Bewegung im Raum ausführt, und einen sich im Medium bewegenden Punkt M vor. Im gegebenen Augenblick besitze der Punkt M die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ und die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$. Die Beschleunigung des Punktes des Mediums, mit dem im gegebenen Augenblick der Punkt M zusammenfällt, nennen wir *translative Beschleunigung* und bezeichnen sie mit $\mathfrak{w}_e$. Wir wollen die Beziehungen zwischen den Beschleunigungen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}_r$ und $\mathfrak{w}_e$ feststellen.

Ohne den einfachsten Fall zu untersuchen, beschränken wir uns sofort auf die Aufstellung der erwähnten Abhängigkeit in zwei Spezialfällen: 1., die Bewegung des

Mediums ist eine fortschreitende, und 2., die Bewegung des Mediums ist eine rotierende um die feste Achse. In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit dem ersten dieser zwei Fälle.

Wir stellen uns also ein unveränderliches Medium vor, das sich fortschreitend bewegt, und einen sich im Medium bewegenden Punkt M (Abb. 188). Zur Zeit t habe der Punkt M die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$, die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ und die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$. Wir vermerken auch die translative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ und die translative Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$.

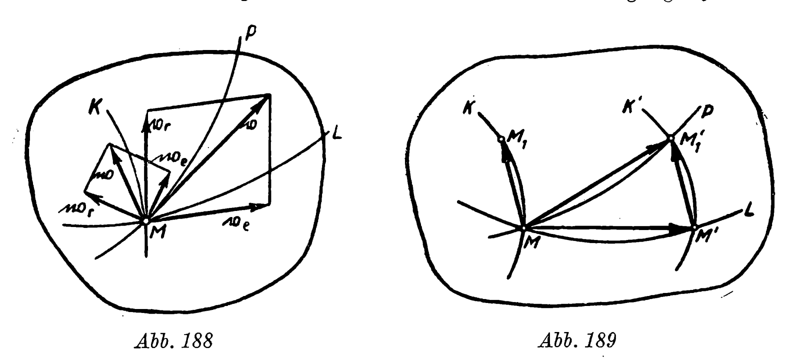


Abb. 188 Abb. 189

Wir werden, wenn das Medium sich fortschreitend bewegt, zeigen, daß die absolute Beschleunigung gleich der Vektorensumme translativer und der relativer Beschleunigung ist.

Um uns davon zu überzeugen, konstruieren wir (entsprechend dem vorigen Paragraphen) die Lage M_1' des Punktes M zur Zeit $t + \Delta t$ (Abb. 189). Wir bemerken dabei, daß die Kurve K' (die verrückte Lage der relativen Bewegungsbahn) parallel der Kurve K liegt, da sich das Medium fortschreitend bewegt. Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ bleiben, da sie sich zusammen mit dem Medium verschieben, gleichfalls parallel zu sich selbst.

Wir konstruieren die elementaren Verrückungen $\overline{MM_1'}$, $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ und $\overline{M'M_1'}$ und bemerken, daß im gegebenen Fall die Verrückung $\overline{M'M_1'}$ nicht nur der Größe nach gleich, sondern auch parallel der Verrückung $\overline{MM_1}$ ist. Wir wollen bei dieser Verrückung die in § 96 aufgestellte Formel (2) anwenden. Wenn wir den Zeitraum Δt als kleine Größe erster Ordnung betrachten, erhalten wir

$$\overline{MM_1'} = \mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}\,(\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3,$$

$$\overline{MM_1} = \mathfrak{v}_r\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_r(\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_e(\Delta t)^2 + \mathfrak{c}_3,$$

wobei $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{c}_3$ Vektoren dritter Ordnung sind. Da die Verrückung $\overline{M'M'_1}$ gleich der Verrückung $\overline{MM_1}$ ist, so ist

$$\overline{M'M'_1} = \mathfrak{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \mathfrak{w}_r (\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3 .$$

Aus $\triangle MM'M'_1$ lesen wir ab:

$$\overline{MM'_1} = \overline{MM'} + \overline{M'M'_1}$$

oder

$$\mathfrak{v} \Delta t + \frac{1}{2} \mathfrak{w} (\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3 = \\ = \mathfrak{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \mathfrak{w}_e (\Delta t)^2 + \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \mathfrak{w}_r (\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3 , \tag{1}$$

Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten erhalten wir:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e + \mathfrak{v}_r ,$$

woraus wir nach der Multiplikation mit Δt

$$\mathfrak{v} \Delta t = \mathfrak{v}_e \Delta t + \mathfrak{v}_r \Delta t$$

erhalten.

Folglich lassen sich in Gleichung (1) die Glieder, die die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ enthalten, kürzen. Wenn wir noch der Kürze halber die Bezeichnung

$$\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{k}_3$$

einführen (wobei $\mathfrak{k}_3$ ein Vektor dritter Ordnung ist), ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{w} (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{w}_e (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{w}_r (\Delta t)^2 + \mathfrak{k}_3 .$$

Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch $\frac{1}{2}(\Delta t)^2$ und bezeichnen den durch $\frac{1}{2}(\Delta t)^2$ dividierten Vektor mit $\mathfrak{k}_1$ (das ist ein Vektor erster Ordnung). Folglich ist:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_r + \mathfrak{k}_1 .$$

Wir gehen nun zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Da

$$\lim_{\Delta t \to 0} [\mathfrak{k}_1] = 0$$

ist, erhalten wir im Grenzfall

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_r$$

d. h., die absolute Beschleunigung ist gleich der Summe der translativen und der relativen Beschleunigung.

Mit anderen Worten, *die absolute Beschleunigung ist die Diagonale des aus der translativen und der relativen Beschleunigung gebildeten Parallelogramms* (Abb. 188). Das erwähnte Parallelogramm heißt *Beschleunigungsparallelogramm.*

Beispiel 41. Ein Mechanismus bestehe aus einer Kurbel OA (Abb. 190), die um die feste Achse O rotiert, und aus dem waagerechten Stabe BC, der eine hin- und hergehende Bewegung in waagerechter Richtung ausführt. Am Ende der Kurbel sei ein Gleitstück befestigt, das längs der waagerechten Kulisse DE gleitet, die an dem Stab BC befestigt ist; $OA = a$. Die Kurbel rotiere gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω; es soll die Beschleunigung des Stabes BC ermittelt werden.

Da sich der Stab BC fortschreitend bewegt, haben alle seine Punkte und auch die Punkte der Kulisse DE eine gleiche Beschleunigung. Diese für alle Punkte gemeinsame Beschleunigung soll bestimmt werden.

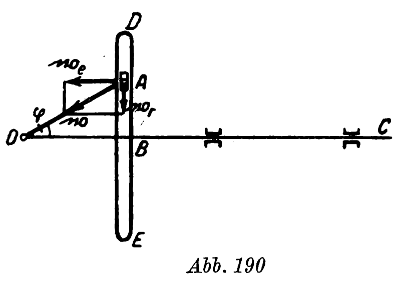


Abb. 190

Wir wollen die Beschleunigung jenes Punktes der Kulisse DE ermitteln, mit dem im gegebenen Augenblick das Kurbelende A zusammenfällt.

Zu diesem Zweck betrachten wir die absolute Bewegung des Punktes A als eine aus der translativen Bewegung zusammen mit der Kulisse DE und aus der relativen Bewegung in bezug auf diese Kulisse zusammengesetzte. Die translative Beschleunigung des Punktes A ist zu bestimmen.

Die absolute Beschleunigung des Punktes A ist uns bekannt: Da die Kurbel OA gleichmäßig rotiert, besteht die absolute Beschleunigung allein aus der Zentripetalkomponente, d. h., sie ist gleich

$$w = a\,\omega^2$$

und verläuft vom Punkte A nach dem Punkte O.

Wenn wir beachten, daß die Bewegung der Kulisse DE eine fortschreitende Bewegung ist, können wir das Additionstheorem der Beschleunigungen in der Form benutzen, wie es soeben aufgestellt worden ist. Wir konstruieren ein Beschleunigungsparallelogramm, wobei wir bemerken, daß die translative Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ waagerecht verläuft, die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ verläuft aber längs der Kulisse DE. Aus dem Beschleunigungsparallelogramm folgern wir:

$$w_e = w \cos\varphi = a\,\omega^2 \cos\varphi\,,$$

wobei φ der Drehwinkel der Kurbel OA ist (Abb. 190). Dies ist die gesuchte Beschleunigung des Stabes BC.

Natürlich hätte man dieses Resultat auch ohne Additionstheorem der Beschleunigungen erhalten können. Wir stellen es dem Leser anheim, dieses Resultat mit Hilfe der in § 90 dargelegten Projektionsmethode nachzuprüfen.

§ 100. Die Addition von Beschleunigungen für eine Rotation um eine feste Achse. Die Coriolisbeschleunigung

Wir wenden uns nun der Betrachtung jenes Falles zu, bei dem die Bewegung des Mediums eine Rotation um eine feste Achse ist.

Um die Abhängigkeit zwischen der absoluten, der relativen und der translativen Beschleunigung klarzustellen, werden wir ebenso wie im vorhergehenden Paragraphen verfahren.

Wir stellen uns ein unveränderliches, um eine feste Achse rotierendes Medium vor und den Punkt M, der sich im Innern des Mediums bewegt (Abb. 191). Wir nehmen an, daß zur Zeit t das Medium und der Punkt M die Lage einnehmen, die in der Abbildung angegeben ist.

Wir konstruieren die Lage M_1', die der Punkt M zur Zeit $t + \Delta t$ bei seiner absoluten Bewegung einnimmt. Dabei bemerken wir, daß nun die Kurve K' (die verrückte Lage der relativen Bewegungsbahn K), allgemein gesagt, nicht parallel zu der Kurve K liegt. Wenn sich das Medium beim Rotieren um seine Achse während der Zeit Δt um den Winkel $\Delta \varphi$ gedreht hat, dann hat sich auch die relative Bewegungsbahn K, die sich zusammen mit dem Medium bewegt, während der Zeit Δt um die Drehachse des Mediums um den gleichen Winkel gedreht. Folglich ergibt sich die Kurve K' aus einer Drehung der Kurve K um die Drehachse des Mediums um den Winkel $\Delta \varphi$. Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ drehen sich gleichfalls, indem sie sich zusammen mit dem Medium verschieben, während der Zeit Δt um die Drehachse des Mediums um den Winkel $\Delta \varphi$. Die verrückte relative Geschwindigkeit und die verrückte relative Beschleunigung bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_r'$ und $\mathfrak{w}_r'$.

Nachdem wir die elementaren Verrückungen $\overline{MM_1'}$, $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ und $\overline{M'M_1'}$ konstruiert haben, erhalten wir:

$$\overline{MM_1'} = \mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}(\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3,$$

$$\overline{MM_1} = \mathfrak{v}_r\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_r(\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_e(\Delta t)^2 + \mathfrak{c}_3,$$

$$\overline{M'M_1'} = \mathfrak{v}_r'\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_r'(\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3',$$

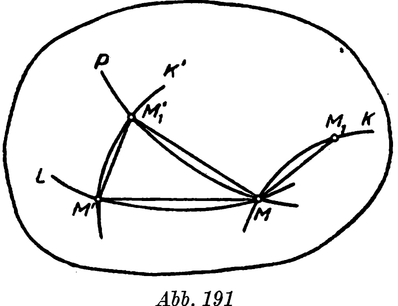


Abb. 191

wobei $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{c}_3$ Vektoren dritter Ordnung sind; $\mathfrak{b}_3'$ ist der um die Drehachse des Mediums um den Winkel $\Delta \varphi$ gedrehte Vektor $\mathfrak{b}_3$.

Aus $\Delta\, MM'M_1'$ lesen wir ab:

$$\overline{MM_1'} = \overline{MM'} + \overline{M'M_1'}$$

oder

$$\mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}(\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_e(\Delta t)^2 + \mathfrak{c}_3 + + \mathfrak{v}_r'\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}_r'(\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3'. \tag{1}$$

Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten erhalten wir:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e + \mathfrak{v}_r$$

und daraus

$$\mathfrak{v}\,\Delta t = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \mathfrak{v}_r\,\Delta t.$$

Wenn wir diese Gleichung von Gleichung (1) abziehen und der Kürze halber die Bezeichnung

$$\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{b}'_3 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{k}_3$$

einführen (wobei $\mathfrak{k}_3$ ein Vektor dritter Ordnung ist), erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{w}(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{w}_e(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{w}'_r(\Delta t)^2 + (\mathfrak{v}'_r - \mathfrak{v}_r)\Delta t + \mathfrak{k}_3 .$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung durch $\frac{1}{2}(\Delta t)^2$ dividieren und den durch $\frac{1}{2}(\Delta t)^2$ dividierten Vektor $\mathfrak{k}_3$ mit $\mathfrak{k}_1$ bezeichnen (das ist ein Vektor erster Ordnung), finden wir:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}'_r + 2\frac{\mathfrak{v}'_r - \mathfrak{v}_r}{\Delta t} + \mathfrak{k}_1 .$$

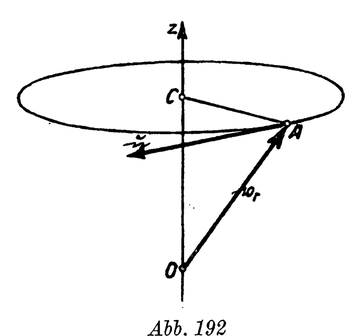


Abb. 192

Wir gehen zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Beachten wir, daß

$$\lim_{\Delta t \to 0}[\mathfrak{w}'_r] = \mathfrak{w}_r , \qquad \lim_{\Delta t \to 0}[\mathfrak{k}_1] = 0$$

ist, und führen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{w}_c = 2\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\mathfrak{v}'_r - \mathfrak{v}_r}{\Delta t}\right]$$

ein, so erhalten wir:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_c .$$

Die Größe $\mathfrak{w}_c$ heißt CORIOLIS-Beschleunigung.

Ist also *die translative Bewegung eine Kreisbewegung um eine feste Achse, so ist die absolute Beschleunigung gleich der Vektorensumme der drei Beschleunigungen: der translativen, der relativen und der* CORIOLIS-*Beschleunigung.*

Es bleibt noch die Berechnung der Größe der CORIOLIS-Beschleunigung und die Bestimmung ihrer Richtung durchzuführen.

Wir werden zeigen, daß sowohl Größe als auch Richtung der CORIOLIS-Beschleunigung mit Hilfe der folgenden einfachen Konstruktion ermittelt werden können.

Wir stellen uns die Drehachse des Mediums vor und nennen sie z-Achse (Abb. 192). Von einem beliebigen, auf der z-Achse liegenden Punkte O tragen wir den Vektor $\overline{OA}$ ab, der gleichderrelativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ ist, und ermitteln die Umfangsgeschwindigkeit (um die z-Achse) des Punktes A des Mediums, der mit dem Ende A des konstruierten Vektors zusammenfällt. Wir bezeichnen diese Umfangsgeschwindigkeit mit dem Buchstaben $\mathfrak{u}$.

Wir werden zeigen, daß

$$\mathfrak{w}_c = 2\mathfrak{u}$$

ist, d. h., *daß die* CORIOLIS-Beschleunigung$\mathfrak{w}_c$ *gleich der doppelten Umfangsgeschwindigkeit des Punktes A (um die z-Achse) ist.*

Wir wollen die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ermitteln. Zu diesem Zweck konstruieren wir die Lage eines Punktes A des Mediums zur Zeit $t + \Delta t$. Da sich das Medium während der Zeit Δt um den Winkel $\Delta\varphi$ gedreht hat, werden wir eine neue Lage A' des Punktes A erhalten, nachdem wir den Radius CA des Kreises, der durch den Punkt A verläuft, um den Winkel $\Delta\varphi$ im Rotationsdrehsinn des Mediums gedreht haben (Abb. 193). Der Vektor $\overline{OA'}$ ist gleich der verrückten relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r'$.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ können wir als Ableitung des Radius-Vektors des Punktes A nach der Zeit finden, oder, was dasselbe ist, als Grenzwert des Verhältnisses aus Zuwachs des Radius-Vektors während der Zeit Δt und diesem Zeitraum. Es sei $\overline{OA}$ der Radius-Vektor des Punktes A; dann ist der Vektor $\overline{AA'}$ der Zuwachs dieses Radius-Vektors während der Zeit Δt. Folglich ist

$$\mathfrak{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\overline{AA'}}{\Delta t}\right].$$

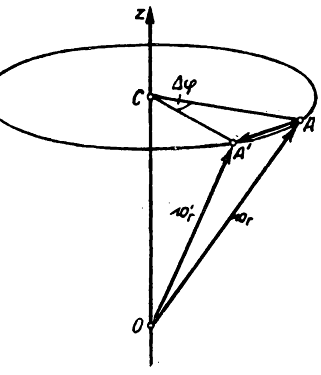


Abb. 193

Aus dem Dreieck OAA' folgt jedoch

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \mathfrak{v}_r' - \mathfrak{v}_r\,.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathfrak{v}_r' - \mathfrak{v}_r}{\Delta t}\right].$$

Vergleichen wir diese Formel mit dem Ausdruck für die CORIOLIS-Beschleunigung

$$\mathfrak{w}_c = 2\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathfrak{v}_r' - \mathfrak{v}_r}{\Delta t}\right],$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{w}_c = 2\,\mathfrak{u}\,.$$

Unter Benutzung des gewonnenen Resultates finden wir die Größe der CORIOLIS-Beschleunigung, indem wir in die Rechnung die Winkelgeschwindigkeit des Mediums einführen. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Mediums mit dem Buchstaben ω, so erhalten wir (Abb. 192):

$$u = CA \cdot \omega\,.$$

Aus dem Dreieck OAC folgt jedoch:

$$CA = v_r \sin(\mathfrak{v}_r, z)\,.$$

Folglich ist:

$$u = v_r\,\omega \sin(\mathfrak{v}_r, z)\,.$$

Wenn wir dieses Ergebnis verdoppeln, erhalten wir für die Größe der CORIOLIS-Beschleunigung die Formel

$$w_c = 2 v_r \cdot \omega \sin(\mathfrak{v}_r, z).$$

Die Richtung der CORIOLIS-Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ verläuft senkrecht zu der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und zur Drehachse des Mediums z.

Beispiel 42. Die Kulisse OB (Abb. 194) rotiere gleichförmig um die Achse O (in dem durch einen Pfeil bezeichneten Drehsinn) mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, das Gleitstück M bewege sich längs der Kulisse OB von O nach B mit der konstanten (in bezug auf die Kulisse) relativen Geschwindigkeit $v_r = c$. Die absolute Geschwindigkeit und absolute Beschleunigung des Gleitstückes M in dem Abstand $OM = a$ sollen ermittelt werden.

Wir setzen die absolute Bewegung des Punktes M aus der Translativbewegung der Kulisse OB und der Relativbewegung in bezug auf die Kulisse zusammen.

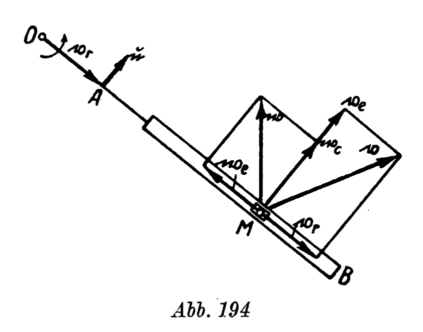


Abb. 194

Zur Ermittlung der absoluten Geschwindigkeit des Punktes M benutzen wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Wir wollen die Translativgeschwindigkeit des Punktes M aus der Kreisbewegung um die Achse O ermitteln; sie ist der Größe nach gleich

$$v_e = a\,\omega$$

und verläuft senkrecht zur Kulisse OB. Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist die Diagonale des aus der Relativ- und Translativgeschwindigkeit konstruierten Rechtecks. Folglich ist

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{c^2 + a^2\,\omega^2}.$$

Zur Berechnung der absoluten Beschleunigung des Punktes M benutzen wir das Additionstheorem der Beschleunigungen. Da die Translativbewegung eine Kreisbewegung um die feste Achse O ist, so ist die absolute Beschleunigung des Punktes M gleich der Summe aus Relativ-, Translativ- und CORIOLIS-Beschleunigung. Wir berechnen jede dieser Beschleunigungen für sich. Da die Relativbewegung des Punktes M eine geradlinige und gleichförmige Bewegung ist, gilt:

$$\mathfrak{w}_r = 0.$$

Die Translativbewegung ist eine gleichförmige Kreisbewegung; deshalb ist die Translativbeschleunigung $\mathfrak{w}_e$ eine zentripetale Beschleunigung, sie ist der Größe nach gleich $w_e = a\omega^2$ und verläuft nach dem Punkte O. Zur Ermittlung der CORIOLIS Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ tragen wir vom Punkte O den Abschnitt OA, der die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ darstellt, ab und finden die Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Punktes A (um die Achse O). Sie ist dem Betrage nach gleich

$$u = v_r\,\omega = c\,\omega$$

und verläuft senkrecht zur Kulisse OB. Folglich ist die CORIOLIS-Beschleunigung gleich

$$\mathfrak{w}_c = 2\,c\,\omega$$

und verläuft gleichfalls senkrecht zur Kulisse OB. Die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ ist die Diagonale des aus Translativ- und CORIOLIS-Beschleunigung konstruierten Rechtecks. Folglich ist

$$w = \sqrt{w_e^2 + w_c^2} = \sqrt{a^2\,\omega^4 + 4\,c^2\,\omega^2}.$$

§ 101. Die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in Polarkoordinaten

In einigen Fällen ist es angebracht, zur Bestimmung der ebenen Bewegung eines Punktes nicht kartesische, sondern Polarkoordinaten anzuwenden, worüber schon einiges in § 79 gesagt wurde. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der ebenen Bewegung eines Punktes kann man in den Fällen, in denen diese Bewegung in Polarkoordinaten gegeben ist, mit Erfolg das Additionstheorem der Geschwindigkeiten und das Additionstheorem der Beschleunigungen anwenden.

Wir nehmen an, daß die ebene Bewegung des Punktes M (Abb. 195) durch die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten

$$r = f_1(t), \qquad \varphi = f_2(t)$$

gegeben ist, und befassen uns zunächst mit der Berechnung der Geschwindigkeit des Punktes M.

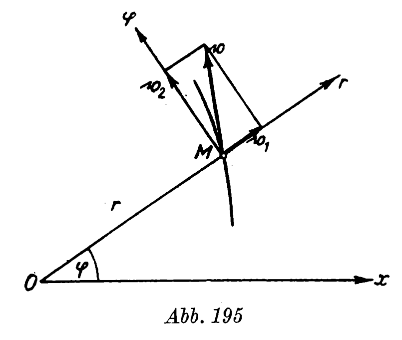


Abb. 195

Wir verlängern den Radius-Vektor des Punktes M nach der Seite anwachsender r und ziehen durch den Punkt M eine senkrecht zum Radius-Vektor verlaufende Gerade, die in Richtung anwachsender φ verläuft. Die auf diese Art im Punkte M ermittelten Achsen heißen *Polarkoordinatenachsen*. (Wir bemerken, daß die Polarkoordinatenachsen im Unterschied zu den Achsen der kartesischen Koordinaten ihre Richtung beim Übergang von Punkt zu Punkt ändern.)

Wir bezeichnen die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M auf den Achsen r und φ mit v_1 und v_2. Es ist klar, daß wir sowohl Größe als auch Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ kennen werden, wenn es uns gelingt, die Komponenten v_1 und v_2 zu berechnen. Somit wird die Bestimmung der Geschwindigkeit des Punktes M auf die Berechnung der Komponenten dieser Geschwindigkeit auf den Polarkoordinatenachsen zurückgeführt.

Zur Berechnung der Komponenten v_1 und v_2 benutzen wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Wir zerlegen die absolute Bewegung des Punktes M in zwei Bewegungskomponenten: in die Translativbewegung mit dem Radius-Vektor $\mathfrak{r}$ und die Relativbewegung längs dieses Radius-Vektors. Dazu denken wir uns eine geradlinige Kulisse, die um den Pol O rotiert und deren Richtung ständig mit dem Radius-Vektor $\mathfrak{r}$ zusammenfällt. Die Translativbewegung des Punktes M mit dieser gedachten Kulisse werden wir seine Translativbewegung mit dem Radius-Vektor $\mathfrak{r}$ nennen, die Relativbewegung des Punktes M längs der Kulisse jedoch nennen wir seine Relativbewegung längs des Radius-Vektors. Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M gleich der Diagonalen des aus der Relativ- und der Translativ-Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_e$ konstruierten Parallelogramms.

Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ des Punktes M in bezug auf seinen Radius-Vektor (oder in bezug auf die gedachte Kulisse) verläuft auf der r-Achse und ist der Größe nach gleich

$$v_r = \dot{r}$$

(da r die bei der Relativbewegung durchlaufene Strecke ist). Die translative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ jedoch, die eine Kreisbewegung um den Punkt O ist, verläuft auf der φ-Achse und ist der Größe nach gleich

$$v_e = r\,\dot{\varphi}$$

(da φ der Drehwinkel der rotierenden Bewegung des Radius-Vektors oder der gedachten Kulisse ist).

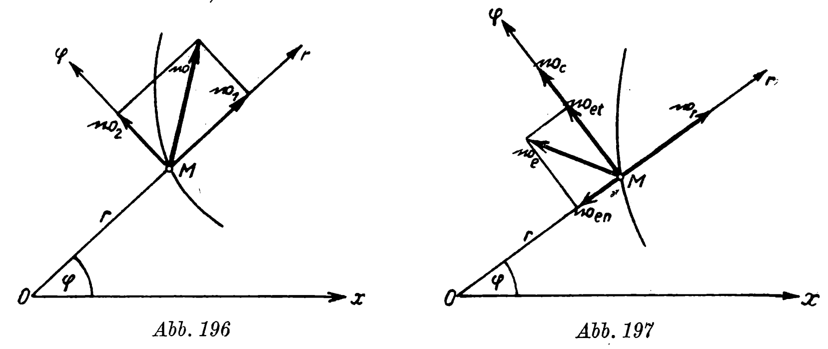


Abb. 196 *Abb. 197*

Wenn wir beachten, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_e$ auf den Achsen r bzw. φ verlaufen können, können wir schließen, daß das aus diesen Geschwindigkeiten konstruierte Parallelogramm mit dem in Abb. 195 aus den Komponenten v_1 und v_2 konstruierten übereinstimmt. Folglich ist

$$v_1 = v_r\,, \qquad v_2 = v_e\,,$$

woraus

$$v_1 = \dot{r}\,, \qquad v_2 = r\,\dot{\varphi} \tag{1}$$

folgt.

Dies sind die Formeln, welche die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der Polarkoordinatenachsen bestimmen.

Nachdem wir die Komponenten v_1 und v_2 nach den soeben aufgeschriebenen Formeln bestimmt haben, finden wir die Größe der Geschwindigkeit v nach der Formel

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2}.$$

Wir ermitteln nun die Beschleunigung des Punktes M. Wir bezeichnen die Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M auf den Achsen r und φ mit w_1 und w_2 (Abb. 196) und nehmen die Berechnung dieser Komponenten vor.

Wir zerlegen wieder die absolute Bewegung des Punktes M in die translative Bewegung mit dem Radius-Vektor $\mathfrak{r}$ und in die relative Bewegung längs des Radius-

Vektors. Nach dem Additionstheorem der Beschleunigungen setzt sich die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M aus drei Beschleunigungen zusammen: der relativen Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$, der translativen Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ und der CORIOLIS-Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_c.$$

Wir wollen jede dieser drei Beschleunigungskomponenten ermitteln (Abb. 197).

Die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ verläuft auf der r-Achse und ist der Größe gleich

$$w_r = \ddot{r}.$$

Die translative Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ setzt sich aus der tangentialen Komponente $\mathfrak{w}_{et}$, die auf der φ-Achse verläuft, und der auf der negativen r-Achse verlaufenden (nach dem Mittelpunkt O) normalen Komponente $\mathfrak{w}_{en}$ zusammen. Die Größen dieser Komponenten sind

$$w_{et} = r\,\ddot{\varphi}, \qquad w_{en} = r\,\dot{\varphi}^2.$$

Die CORIOLIS-Beschleunigung verläuft auf der φ-Achse und ist der Größe nach gleich

$$w_c = 2\,v_r\,\dot{\varphi} = 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}.$$

Wir projizieren nun die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ und ihre Komponenten $\mathfrak{w}_r$, $\mathfrak{w}_e$, $\mathfrak{w}_c$ auf die Achsen r und φ. Da die Projektion der Summe der Vektoren gleich der Summe der Projektionen der Komponenten ist, erhalten wir:

$$w_1 = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2, \qquad w_2 = r\,\ddot{\varphi} - 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Mit diesen Formeln werden die Komponenten der Beschleunigung auf den Polarkoordinatenachsen bestimmt. Die Größe der Beschleunigung finden wir nach der Formel

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$

Beispiel 43. Die Bewegung eines Punktes sei in Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$r = a\,t^2, \qquad \varphi = b\,t^2$$

gegeben, wobei a und b konstante Größen sind. Die Bewegungsbahn, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes sollen ermittelt werden.

Eliminieren wir die Zeit aus den gegebenen Bewegungsgleichungen, so erhalten wir

$$r = \frac{a}{b}\,\varphi.$$

Dies ist die Gleichung einer archimedischen Spirale.

Gehen wir zur Bestimmung der Geschwindigkeit über, so finden wir die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Polarkoordinatenachsen nach den Formeln (1) zu:

$$v_1 = \dot{r} = 2\,a\,t, \qquad v_2 = r\,\dot{\varphi} = 2\,a\,b\,t^3.$$

Hieraus folgt:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2\,a\,t\sqrt{1 + b^2 t^4}.$$

Ferner finden wir die Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf den Polarkoordinatenachsen nach den Formeln (2):

$$w_1 = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = 2\,a - 4\,a\,b^2 t^4,$$

$$w_2 = r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} = 2\,a\,b\,t^2 + 8\,a\,b\,t^2 = 10\,a\,b\,t^2.$$

Folglich ist:

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(2\,a - 4\,a\,b^2 t^4)^2 + 100\,a^2 b^2 t^4} =$$
$$= 2\,a\sqrt{1 + 21\,b^2 t^4 + 4\,b^4 t^8}.$$

§ 102. Die Relativbewegung eines starren Körpers

Wir stellen uns einen starren Körper A, der irgendeine Bewegung im Raume ausführt, und das sich bewegende unveränderliche Medium B vor. Weiterhin denken wir uns zwei Beobachter, von denen der eine unbeweglich in bezug auf das Medium B ist und sich zusammen mit dem Medium bewegt, während der andere unbeweglich im Raum ist. Die Bewegung des Körpers A, die von dem sich mit dem Medium bewegenden Beobachter beobachtet wird, nennen wir *Relativbewegung des Körpers A* in bezug auf das Medium B; die Bewegung des Körpers A dagegen, die von dem unbeweglichen Beobachter beobachtet wird, nennen wir *absolute Bewegung des Körpers A*. Die Bewegung des Körpers A, zusammen mit dem Medium B, nennen wir *Translativbewegung des Körpers A*.

Die absolute Bewegung des Körpers A ist zusammengesetzt aus der relativen und translativen Bewegung: Die beiden letzten Bewegungen erhalten die Bezeichnungen *Bewegungskomponenten*.

Wenn wir im Körper A einen beliebigen Punkt vermerken, dann kann man die absolute Bewegung dieses Punktes gleichfalls aus der relativen Bewegung in bezug auf das Medium B und aus der translativen Bewegung mit dem Medium zusammengesetzt betrachten. Die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung des Punktes M werden mit Hilfe des Additionstheorems der Geschwindigkeiten und des Additionstheorems der Beschleunigungen gefunden.

Den Begriff der zusammengesetzten Bewegung eines starren Körpers kann man auf den Fall einer Bewegung ausdehnen, die aus einer beliebigen Anzahl von Bewegungskomponenten zusammengesetzt ist.

Wir stellen uns z. B. den starren Körper A und zwei unveränderliche Medien B und C vor, die sich im Raume bewegen. Die absolute Bewegung des Körpers A ist aus den folgenden drei Bewegungen zusammengesetzt: der Relativbewegung des Körpers A in bezug auf das Medium B, der Relativbewegung des Mediums B in bezug auf das Medium C und der Translativbewegung mit dem Medium C. Diese drei Bewegungen heißen *Bewegungskomponenten*.

Entsprechend wird der Begriff der zusammengesetzten Bewegung auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Bewegungskomponenten ausgedehnt.

KAPITEL XVII

DIE EBEN-PARALLELE BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS

§ 103. Zerlegung der ebenen Bewegung in eine translatorische und eine rotierende. Die Gleichungen der ebenen Bewegung. Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung einer ebenen Figur

Im Kapitel XV haben wir die zwei einfachsten Typen der Bewegung eines starren Körpers betrachtet: die fortschreitende Bewegung und die Rotation um eine feste Achse. Wir gehen nun zum Studium anderer, komplizierterer Bewegungen eines starren Körpers über. Im vorliegenden Kapitel werden wir die sogenannte eben-parallele Bewegung des starren Körpers betrachten.

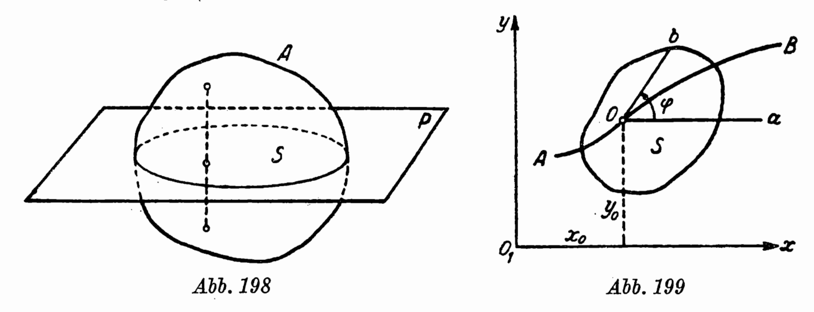


Abb. 198 *Abb. 199*

Die Bewegung eines starren Körpers A (Abb. 198) heißt *parallel zu der unbeweglichen Ebene* oder kürzer, *eben-parallel*, wenn die beim Schnitt des Körpers durch irgendeine unbewegliche Ebene P sich ergebende Figur S während der gesamten Zeit der Bewegung in dieser Ebene verbleibt.

Es liegt auf der Hand, daß die Rotation des starren Körpers um eine feste Achse ein Spezialfall der eben-parallelen Bewegung ist. Die eben-parallele Bewegung des starren Körpers ist von bedeutendem Interesse für die Anwendung, in der Mehrzahl der existierenden Mechanismen führen die einzelnen Teile des Mechanismus eine eben-parallele Bewegung aus.

Die Bewegung des sich parallel zu der unbeweglichen Ebene P bewegenden Körpers A wird vollständig durch die Bewegung der ebenen Figur S bestimmt. Alle Punkte des Körpers, die auf einer Senkrechten zur Ebene P liegen, bewegen sich auf dieselbe Art.

Daher können wir uns im weiteren auf das Studium der Bewegung der ebenen Figur S in der Ebene beschränken oder auf die sogenannte *ebene Bewegung.*

Wir werden zeigen, daß *die ebene Bewegung der unveränderlichen Figur als aus der fortschreitenden Bewegung und der Rotation zusammengesetzt angesehen werden kann.*

Wir stellen uns die ebene Figur S vor (Abb. 199), die irgendeine Bewegung in der Zeichnungsebene ausführt. Wir wählen in dieser Figur irgendeinen (willkürlichen) Punkt, den wir mit dem Buchstaben O bezeichnen und Pol nennen und nehmen an, daß der Pol O bei der Bewegung der Figur S die Kurve AB beschreibe. Dann stellen wir uns ein unveränderliches Medium vor, das sich fortschreitend zusammen mit dem Pol O bewegt. Wenn die Figur S ihre absolute Bewegung in der gegebenen Ebene ausführt, führt sie gleichzeitig eine bestimmte Relativbewegung in bezug auf das soeben erwähnte Medium aus. Diese Relativbewegung in bezug auf das Medium, das sich fortschreitend mit dem Pol O bewegt, vereinbaren wir, der Kürze halber „Relativbewegung in bezug auf den Pol O" zu nennen. Also stellt sich die absolute Bewegung der Figur S als eine aus der translativen Bewegung zusammen mit dem Pol O und der relativen Bewegung in bezug auf diesen Pol zusammengesetzte dar.

Die Translativbewegung zusammen mit dem Pol O ist eine fortschreitende Bewegung. Da in der Relativbewegung der Pol O in (relativer) Ruhe bleibt, ist die Relativbewegung der Figur S eine Rotation um den Punkt O (oder genauer, um die Achse, die durch den Punkt O geht und zur Zeichnungsebene senkrecht steht). Somit erscheint die Bewegung der Figur S als zusammengesetzt aus der fortschreitenden Bewegung zusammen mit dem Pol O und aus der Rotation um diesen Pol.

Der fortschreitende Teil der Bewegung der Figur S wird eindeutig durch die Bewegung des Poles O bestimmt. Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes O, bezogen auf die rechtwinkligen Achsen x und y, mit x_0 und y_0. Die Bewegung des Poles der ebenen Figur wird durch die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten eindeutig bestimmt:

$$x_0 = f_1(t), \qquad y_0 = f_2(t). \tag{1}$$

Um den rotierenden Teil der Bewegung der Figur S zu bestimmen, stellen wir die Rotationsgleichung auf. Dazu ziehen wir durch den Pol O zwei Geraden Oa und Ob, von denen die erste in relativer Ruhe bleibt (d. h., sie bewegt sich fortschreitend zusammen mit dem Pol O), die zweite aber ist mit der Figur S verbunden und rotiert mit derselben um den Pol O.[1] Den Winkel zwischen den Geraden Oa und Ob bezeichnen wir mit φ und nennen ihn den Drehwinkel.[2] Die Rotation der Figur S um den Pol O wird durch die Rotationsgleichung

$$\varphi = f_3(t) \tag{2}$$

bestimmt.

Durch die Gleichungen (1) und (2) wird die Bewegung der Figur S eindeutig bestimmt. Wir werden diese Gleichungen „Gleichungen der ebenen Bewegung" nennen.

Die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε der Rotation der Figur S um den Pol O wird durch die bekannten Formeln

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

bestimmt.

[1] Die Halbgerade Oa bleibt während der Zeit der Bewegung parallel zu sich selbst; in Abb. 199 liegt sie parallel zu der festen Achse x.

[2] Den Drehwinkel φ werden wir als positiv rechnen, wenn er von der Halbgeraden Oa im Gegenzeigersinn abgetragen ist.

Als Pol O wählten wir einen willkürlichen Punkt der ebenen Figur. Wenn wir verschiedene Punkte der ebenen Figur als Pole annehmen, erhalten wir eine unzählige Menge von Zerlegungsmöglichkeiten der ebenen Bewegung in einen fortschreitenden und einen rotierenden Teil. Natürlich verändert sich mit der Veränderung des Pols der fortschreitende Teil der Bewegung der ebenen Figur. Wir werden nun zeigen, daß der rotierende Teil der Bewegung einer ebenen Figur nicht von der Wahl des Poles abhängt.

Wir stellen uns eine ebene Figur S vor, die irgendeine Bewegung in der Abbildungsebene ausführt (Abb. 200). Wählen wir nun als Pol den die Kurve AB beschreibenden Punkt O und stellen die Rotationsgleichung um diesen Pol auf. Zu diesem Zweck konstruieren wir den Drehwinkel φ, indem wir die Gerade Oa ziehen, die sich fortschreitend mit dem Pol O bewegt, und die Gerade Ob, die mit der Figur S verbunden ist. Wir erhalten die Rotationsgleichung um den Pol O:

$$\varphi = f_3(t).$$

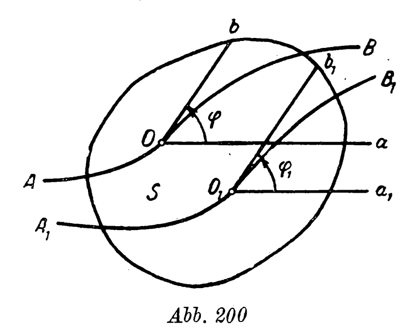


Abb. 200

Nun wählen wir als Pol irgendeinen Punkt O_1, der bei der Bewegung der Figur S die Kurve A_1B_1 beschreibt. Wir stellen die Rotationsgleichung um diesen neuen Pol auf. Um den Drehwinkel um den Pol O_1 zu konstruieren, müssen wir die Geraden O_1a_1 und O_1b_1 ziehen, von denen die erste sich fortschreitend mit dem Pol O_1 bewegt, die zweite aber mit der Figur S verbunden ist. Da die Wahl dieser Geraden in unserem Belieben steht, wollen wir $O_1a_1 \parallel Oa$ und $O_1b_1 \parallel Ob$ legen. In diesem Falle werden die Geraden Oa und O_1a_1 während der gesamten Zeit der Bewegung *parallel bleiben* (weil sich beide fortschreitend bewegen), und auch die Geraden Ob und O_1b_1 werden parallel bleiben (weil beide mit der Figur S verbunden sind). Bezeichnen wir den Winkel zwischen den Geraden O_1a_1 und O_1b_1 mit φ_1, so gilt während der gesamten Zeit der Bewegung

$$\varphi_1 = \varphi$$

und folglich

$$\varphi_1 = f_3(t).$$

Somit ist die Rotationsgleichung um den Pol O_1 identisch mit der Rotationsgleichung um den Pol O, d. h., der rotierende Teil der Bewegung der ebenen Figur S hängt nicht von der Wahl des Poles ab.

Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Rotation um den Pol O mit ω und ε bezeichnen, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Rotation um den Pol O_1 jedoch mit ω_1 und ε_1, erhalten wir:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

d. h., *die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung einer ebenen Figur bei ihrer Rotation um irgendeinen Pol hängt nicht von der Wahl des Poles ab.* Die für alle Pole gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung ε werden wir einfach Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der ebenen Figur nennen (ohne irgendwelche Hinweise auf den Punkt der Figur, den wir als Pol annehmen).

§ 104. Die Geschwindigkeiten der Punkte einer ebenen Figur und das momentane Geschwindigkeitszentrum

Wir stellen uns die Bewegung der ebenen Figur S (Abb. 201) vor, zerlegt in die translative Bewegung mit dem Pol O und die Relativbewegung in bezug auf diesen Punkt. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M der ebenen Figur kann mit Hilfe des Additionstheorems der Geschwindigkeiten ermittelt werden. Die absolute Geschwindigkeit des Punktes M ist gleich der Summe aus translativer und relativer Geschwindigkeit.

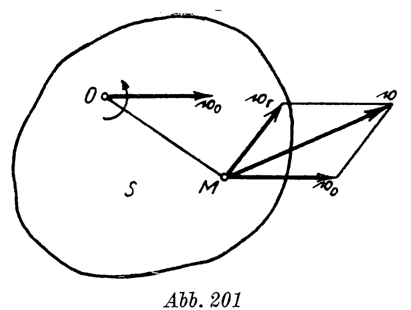


Abb. 201

Da im gegebenen Fall die translative Bewegung eine fortschreitende ist, so ist die translative Geschwindigkeit des Punktes M gleich der Geschwindigkeit des Poles O. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}_0$. Da aber die relative Bewegung eine Rotation um den Pol ist, so ist die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ die Rotationsgeschwindigkeit um diesen Pol. Ihre Größe ist gleich

$$v_r = OM \cdot \omega,$$

wobei ω die absolute Größe der Winkelgeschwindigkeit der ebenen Figur ist. Sie verläuft senkrecht zum Abschnitt MO in Rotationsrichtung der Figur S (in der Abbildung ist die Rotationsrichtung der Figur S mit einem kleinen Pfeil bezeichnet).

Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M ist die Diagonale des aus den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_r$ konstruierten Parallelogramms.

Somit erhalten wir folgendes Theorem: *Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes einer ebenen Figur ist gleich der Vektorensumme der Geschwindigkeit des Poles und der Rotationsgeschwindigkeit des gegebenen Punktes um diesen Pol.*

Unter Benutzung dieses Ergebnisses werden wir zeigen, daß es zu jeder Zeit einen Punkt der ebenen Figur gibt, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist.

Wir stellen uns eine ebene Figur S vor, die irgendeine Bewegung in der Abbildungsebene ausführt (Abb. 202). Wir wählen als Pol den Punkt O und bezeichnen die Geschwindigkeit des Poles mit $\mathfrak{v}_0$. Die absolute Größe der Winkelgeschwindigkeit der Figur S bezeichnen wir mit ω, die Rotationsrichtung um den Pol O ist in der Abbildung durch einen kleinen Pfeil angegeben.

Nun tragen wir vom Punkte O senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ den Abschnitt $OP = \frac{v_0}{\omega}$ nach der Seite ab, so daß für den von P nach O blickenden Beobachter die Geschwindigkeit des Poles so erscheint, als stimme ihr Drehsinn mit dem der Figur S überein (in Abb. 202 im Gegenzeigersinn). Es ist leicht zu ersehen, daß die Geschwindigkeit des Punktes P gleich Null ist.

Die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ des Punktes P um den Pol O ist der Größe nach gleich

$$v_r = O\,P \cdot \omega = \frac{v_0}{\omega}\,\omega = v_0\,.$$

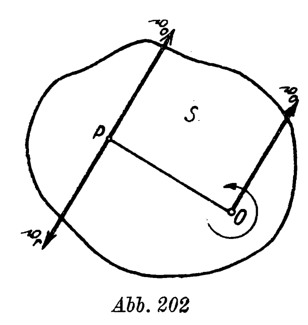


Abb. 202

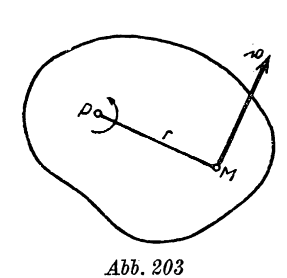


Abb. 203

Die Richtung dieser Rotationsgeschwindigkeit aber verläuft, wie aus der Abbildung ersichtlich ist, entgegengesetzt zur Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$. Folglich ist die der Summe der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_r$ gleiche absolute Geschwindigkeit des Punktes P gleich Null.

Der Punkt P, dessen Geschwindigkeit im gegebenen Zeitpunkt gleich Null ist, heißt *momentanes Geschwindigkeitszentrum*.[1]

Wir stellen uns jetzt vor, daß das momentane Geschwindigkeitszentrum P der Pol der Bewegung ist. Wenn wir das am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Theorem anwenden und beachten, daß die Geschwindigkeit des Poles jetzt gleich Null ist, erhalten wir folgendes Resultat: *Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes einer ebenen Figur ist die Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Geschwindigkeitszentrum.* Bezeichnen wir den Abstand PM des Punktes M vom momentanen Geschwindigkeitszentrum P mit r (Abb. 203), so können wir schließen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M der Größe nach gleich

$$v = r\,\omega$$

ist und senkrecht zum Abschnitt PM in Richtung der Rotation der ebenen Figur verläuft.

[1] Ist $\omega = 0$, dann gilt $OP = \frac{v_0}{\omega} = \infty$, und folglich existiert in diesem Fall kein momentanes Geschwindigkeitszentrum (oder es befindet sich im Unendlichen). Ist $\omega = 0$, so sind die Rotationsgeschwindigkeiten aller Punkte der ebenen Figur um den Pol O gleich Null, woraus folgt, daß die absoluten Geschwindigkeiten aller Punkte der ebenen Figur gleich der Geschwindigkeit des Poles sind. Mit anderen Worten, im Fall $\omega = 0$ haben alle Punkte der ebenen Figur gleiche Geschwindigkeiten.

Also entsprechen in jedem gegebenen Augenblick die Geschwindigkeiten der Punkte einer ebenen Figur einer Drehung der Figur um den festen Punkt P, weshalb der Punkt P „Geschwindigkeitszentrum" heißt. Durch das Wort „momentan" unterstreichen wir, daß der Punkt P nur für den gegebenen Augenblick als Geschwindigkeitszentrum erscheint. Den verschiedenen Zeiten entsprechen verschiedene momentane Geschwindigkeitszentren.

Wir sehen, daß die Geschwindigkeiten aller Punkte einer ebenen Figur eindeutig bestimmt sind, wenn für einen gegebenen Augenblick das momentane Geschwindigkeitszentrum P und die Winkelgeschwindigkeit ω der Figur bekannt sind.

Das momentane Geschwindigkeitszentrum kann sehr häufig auf folgende einfache Art gefunden werden.

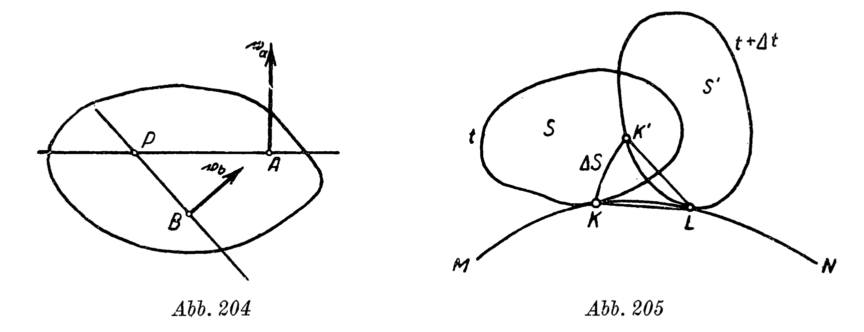


Abb. 204 *Abb. 205*

Aus Abb. 203 ist ersichtlich, daß sich das momentane Geschwindigkeitszentrum P auf der Geraden befindet, die im Punkte M senkrecht auf seiner Geschwindigkeit steht. Hieraus folgt, daß das momentane Geschwindigkeitszentrum P im Schnittpunkt der Geraden liegt, die in den Punkten A und B senkrecht auf den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$ und $\mathfrak{v}_b$ stehen, wenn die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$ und $\mathfrak{v}_b$ bekannt sind. Durch dieses einfache Verfahren gelingt es häufig, das momentane Geschwindigkeitszentrum zu konstruieren.

Bei der Anwendung hat man es oft mit einer Bewegung der ebenen Figur zu tun, deren Umfang ohne Gleiten auf irgendeiner festen Kurve rollt (z. B. ein bewegliches Zahnrad, das auf dem Teilkreis eines festen Zahnrades rollt). Auch in diesem Fall ist es leicht, das momentane Geschwindigkeitszentrum der beweglichen Figur zu bestimmen: Es befindet sich im Berührungspunkt des rollenden Teilkreises mit der festen Kurve. Stellen wir uns eine ebene Figur S vor, die von einer willkürlichen Kurve begrenzt ist, und ohne zu gleiten auf der festen Kurve MN rollt (Abb. 205). Wir vermerken die Lagen S und S', welche die ebene Figur zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ einnimmt. Zur Zeit t erscheint als Berührungspunkt der beweglichen und der festen Kurve der Punkt K, zur Zeit $t + \Delta t$ ist der Punkt L der Berührungspunkt. Wir werden zeigen, daß die Geschwindigkeit des Punktes K zur Zeit t gleich Null ist. Zur Zeit $t + \Delta t$ nimmt der Punkt K der rollenden Kurve die Lage K' ein, während

der Zeit Δt hat er die Strecke KK' durchlaufen, die wir mit ΔS bezeichnen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes K zur Zeit t mit $\mathfrak{v}$, so erhalten wir

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta S}{\Delta t}\right].$$

Da die Figur S auf der Kurve MN ohne Gleiten rollt, ist der Bogen $K'L$ gleich dem Bogen KL. Wir ziehen die Sehnen KL und $K'L$ und können annehmen, wenn wir die kleinen Größen der höheren Ordnungen vernachlässigen, daß diese Sehnen ebenfalls gleich sind. Vernachlässigen wir wiederum die kleinen Größen höherer Ordnungen, so können wir den Bogen KK' als Kreisbogen vom Radius $KL = K'L$ mit dem Mittelpunkt L betrachten. In diesem Fall erhalten wir, wenn wir den Winkel zwischen den Sehnen KL und $K'L$ mit a bezeichnen, den angenäherten Ausdruck

$$\Delta S \doteq KL \cdot a$$

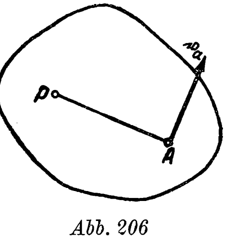


Abb. 206

Wir werden jetzt den Zeitraum Δt als kleine Größe erster Ordnung ansehen. Der Abschnitt KL und der Winkel a werden gleichfalls kleine Größen erster Ordnung sein, dagegen wird der Bogen ΔS, wie aus der letzten Gleichung ersichtlich ist, eine kleine Größe zweiter Ordnung sein. Folglich ist das Verhältnis $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ eine kleine Größe erster Ordnung, woraus folgt, daß

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta S}{\Delta t}\right] = 0$$

ist.

Somit ist die Geschwindigkeit des Punktes K zur Zeit t gleich Null. Das bedeutet aber, daß der Punkt K das momentane Geschwindigkeitszentrum zur Zeit t ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß es für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit einer ebenen Figur genügt, die Größe der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Figur zu kennen, wenn das momentane Geschwindigkeitszentrum für den gegebenen Zeitpunkt bekannt ist. Nehmen wir an, daß uns die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A bekannt ist (Abb. 206). Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ eine Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Geschwindigkeitszentrum P ist, gilt

$$v_a = PA \cdot \omega,$$

wobei ω die absolute Größe der gesuchten Winkelgeschwindigkeit der ebenen Figur ist. Hieraus folgt:

$$\omega = \frac{v_a}{PA}.$$

Somit genügt es, für die Bestimmung der absoluten Größe der Winkelgeschwindigkeit einer ebenen Figur die Größe der Geschwindigkeit irgendeines Punktes der Figur

durch den Abstand dieses Punktes vom momentanen Geschwindigkeitszentrum zu dividieren. Das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit, das durch den Drehsinn der Rotation bestimmt ist, kann man ermitteln, wenn man die Lage der Geschwindigkeit des gegebenen Punktes in bezug auf das momentane Geschwindigkeitszentrum kennt.

Beispiel 44. Ein Kurbeltrieb bestehe aus der Kurbel OA, die sich um die Achse O dreht, der Kurbelstange AB und dem Kreuzkopf B, der auf der geraden Führung ON gleitet (Abb. 207); $OA = r$, $AB = l$. Die Kurbel OA rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Das momentane Geschwindigkeitszentrum und die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Kurbelstange AB sind zu ermitteln.

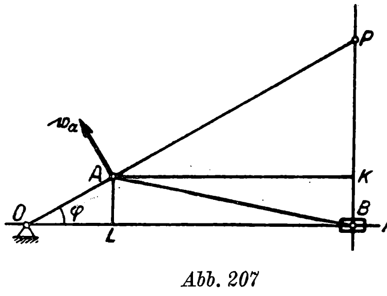


Abb. 207

Uns sind die Richtungen der Geschwindigkeiten der zwei Punkte A und B der Kurbelstange bekannt. Die Geschwindigkeit des Punktes A verläuft senkrecht zu der Kurbel OA, die Geschwindigkeit des Punktes B verläuft auf der Geraden ON. Wir errichten in den Punkten A und B Senkrechten auf den Richtungen dieser Geschwindigkeiten, der Schnittpunkt P der soeben gezogenen Geraden ist das momentane Geschwindigkeitszentrum der Kurbelstange.

Um die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelstange ω_2 zu finden, wenden wir uns der Geschwindigkeit des Punktes A zu. Da der Punkt A zur Kurbel OA gehört, ist seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ die Rotationsgeschwindigkeit um den Punkt O. Folglich gilt:

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = r\,\omega_1 .$$

Da aber der Punkt A auch zu der Kurbelstange AB gehört, muß seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ gleichzeitig die Rotationsgeschwindigkeit um den Punkt P sein, d. h.

$$v_a = AP \cdot \omega_2 ,$$

woraus

$$\omega_2 = \frac{v_a}{AP} = \frac{r\,\omega_1}{AP}$$

folgt.

Danach erhalten wir, wenn wir vom Punkte A aus die Lote AK und AL auf die Geraden BP und ON fällen und $\sphericalangle\, AON$ (den Drehwinkel der Kurbel) mit dem Buchstaben φ bezeichnen:

$$AP = \frac{AK}{\cos\varphi},$$

$$AK = LB = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

und folglich

$$AP = \frac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Endgültig erhalten wir:

$$\omega_2 = \frac{r\,\omega_1 \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}.$$

Nachdem das momentane Geschwindigkeitszentrum P und die Winkelgeschwindigkeit ω_2 ermittelt sind, können wir leicht die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Kurbel AB als Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Zentrum P bestimmen.

Beispiel 45. Auf die Welle O (Abb. 208) ist die Kurbel OA aufgesetzt, die mit der Kurbelstange AB verbunden ist. Am Ende B ist die Kurbelstange mit einem Gleitstück verbunden, das längs der geradlinigen Kulisse gleitet. Im Punkte C ist an der Kurbelstange gelenkig die Zugstange CD befestigt, welche die Bewegung mittels des Gleitstückes D und der vertikalen Stange DE auf den Schieber E überträgt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A ist gegeben, die Geschwindigkeit des Schiebers E soll bestimmt werden.

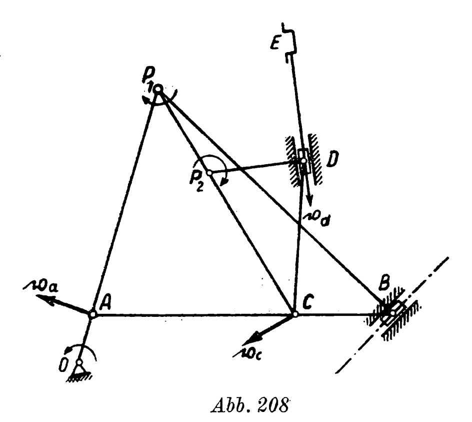


Abb. 208

Da der Stab DE sich fortschreitend bewegt, ist die Geschwindigkeit des Schiebers E gleich der Geschwindigkeit des Punktes D. Wir wollen diese Geschwindigkeit suchen.

Zuerst ermitteln wir die Geschwindigkeit des Punktes C. Dazu konstruieren wir das momentane Geschwindigkeitszentrum P_1 der Kurbelstange AB. Die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte A und B sind uns bekannt, das momentane Zentrum P_1 wird als Schnittpunkt der in den Punkten A und B zu den Geschwindigkeiten dieser Punkte errichteten Senkrechten bestimmt. Der Rotationsdrehsinn der Kurbelstange AB um das momentane Zentrum P_1 wird durch die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ bestimmt. In Abb. 208 ist die Richtung der Rotation der Kurbelstange um das momentane Zentrum P_1 durch einen Pfeil bezeichnet. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_c$ des Punktes C, als Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Zentrum P_1, verläuft senkrecht zu der Geraden P_1C in Richtung der Rotation. Da die Größen der Rotationsgeschwindigkeiten proportional den entsprechenden Radien sind, gilt:

$$\frac{v_c}{v_a} = \frac{P_1 C}{P_1 A},$$

woraus

$$v_c = v_a \frac{P_1 C}{P_1 A}$$

folgt.

Nachdem wir die Geschwindigkeit des Punktes C bestimmt haben, gehen wir zum Punkte D über. Da der Punkt D zur Zugstange CD gehört, ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_d$ dieses Punktes die Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Geschwindigkeitszentrum der Zugstange CD. Wir bezeichnen das momentane Geschwindigkeitszentrum der Zugstange mit P_2. Die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte C und D sind uns bekannt. Wir errichten Senkrechten in den Punkten C und D auf diesen Geschwindigkeiten und ermitteln darauf das momentane Zentrum P_2 in ihrem Schnittpunkt. Die Richtung der Rotation der Zugstange CD um das momentane Zentrum P_2 bestimmen wir,

indem wir die uns bereits bekannte Richtung der Geschwindigkeit des Punktes C beachten. Der Rotationsdrehsinn ist in Abb. 208 mit einem Pfeil angegeben. Nun ist es leicht, die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_d$ des Punktes D aus der Wechselbeziehung

$$\frac{v_d}{v_c} = \frac{P_2 D}{P_2 C}$$

zu finden, woraus wir

$$v_d = v_c \frac{P_2 D}{P_2 C}$$

finden oder, wenn wir die weiter oben gefundene Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_c$ substituieren:

$$v_d = v_a \frac{P_1 C}{P_1 B} \cdot \frac{P_2 D}{P_2 C}.$$

Dies ist die Größe der Geschwindigkeit des Gleitstückes D und folglich auch die des Schiebers E. Die Richtung dieser Geschwindigkeit wird durch den Rotationsdrehsinn der Zugstange CD um das momentane Zentrum P_2 bestimmt. Bei der in Abbildung 208 dargestellten Lage des Mechanismus ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_d$ nach unten gerichtet.

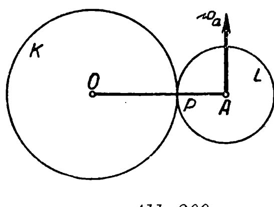


Abb. 209

Beispiel 46. Auf die feste Achse O sind ein festes Zahnrad K mit dem Radius a und der rotierende Stab OA von der Länge $a + b$ aufgesetzt, an dessen Ende A das bewegliche Zahnrad L vom Radius b befestigt ist, das mit dem festen Zahnrad K zusammengekoppelt ist (Abb. 209). Der Stab OA rotiert um die Achse O mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des Zahnrades L soll ermittelt werden.

Da bei der Rotation des Stabes OA das bewegliche Zahnrad L ohne zu gleiten auf dem festen Zahnrad K rollt, befindet sich das momentane Geschwindigkeitszentrum P des Zahnrades L im Berührungspunkt der Teilkreise der Zahnräder. Um die Winkelgeschwindigkeit des Zahnrades L zu finden, wenden wir uns der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A zu. Da der Punkt A zum Stabe OA gehört, ist

$$v_a = O A \cdot \omega_1 = (a + b)\, \omega_1 .$$

Der Punkt A gehört auch zum Zahnrad L. Deshalb gilt

$$v_a = P A \cdot \omega_2 ,$$

woraus

$$\omega_2 = \frac{v_a}{P A} = \frac{(a + b)\, \omega_1}{b}$$

folgt.

Die auf dem Teilkreis des Zahnrades L liegenden Punkte beschreiben Epizykloiden, die betrachtete Verbindung der Zahnräder heißt epizykloidisch.

§ 105. Der Geschwindigkeitsplan

Wir betrachten die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$, $\mathfrak{v}_b$, $\mathfrak{v}_c$, $\mathfrak{v}_d$ der Punkte A, B, C und D irgendeiner sich bewegenden ebenen Figur (Abb. 210).

Von einem willkürlichen Punkte o tragen wir die Abschnitte oa, ob, oc und od ab, die der Größe und Richtung nach die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$, $\mathfrak{v}_b$, $\mathfrak{v}_c$, $\mathfrak{v}_d$ darstellen, und verbinden die Punkte a, b, c und d durch gerade Linien. Die so gewonnene Konstruktion heißt *Geschwindigkeitsplan.* Die Abschnitte oa, ob, oc, od werden wir Strahlen, die Punkte a, b, c, d Eckpunkte des Geschwindigkeitsplanes nennen.

Also werden die absoluten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C, D durch die Strahlen oa, ob, oc, od des Geschwindigkeitsplanes dargestellt. Wir werden zeigen, daß der Abschnitt ab, der die Eckpunkte a und b verbindet, der Größe und Richtung nach die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes B um den Punkt A darstellt.

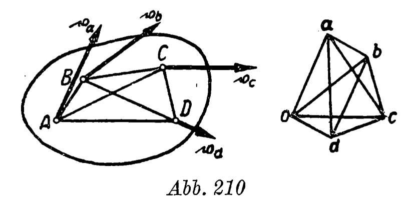


Abb. 210

Wir wählen den Punkt A als Pol. Am Anfang des vorigen Paragraphen wurde festgestellt, daß die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der ebenen Figur gleich der Summe der Geschwindigkeit des Pols und der Rotationsgeschwindigkeit des gegebenen Punktes um diesen Pol ist. Wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes B um den Punkt A mit $\mathfrak{v}_{ab}$ bezeichnen, erhalten wir auf Grund dieses Theorems

$$\mathfrak{v}_b \doteq \mathfrak{v}_a + \mathfrak{v}_{ab}. \tag{1}$$

Andererseits folgt aus dem Dreieck aob:

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}$$

oder

$$\mathfrak{v}_b = \mathfrak{v}_a + \overline{ab}. \tag{2}$$

Wenn wir Gleichung (1) und Gleichung (2) vergleichen, können wir schließen, daß

$$\overline{ab} = \mathfrak{v}_{ab}$$

ist.

Ebenso können wir uns überzeugen, daß

$$\overline{bc} = \mathfrak{v}_{bc}, \quad \overline{ac} = \mathfrak{v}_{ac} \quad \text{usw.}$$

ist, wobei $\mathfrak{v}_{bc}$ und $\mathfrak{v}_{ac}$ usw. die Rotationsgeschwindigkeiten des Punktes C um den Punkt B, des Punktes C um den Punkt A usw. darstellen.

Wenn wir die absolute Größe der Winkelgeschwindigkeit der ebenen Figur mit ω bezeichnen, schließen wir, daß

$$ab = AB \cdot \omega, \qquad bc = BC \cdot \omega, \qquad ac = AC \cdot \omega \qquad \text{usw.}$$

ist, die Richtungen der Abschnitte ab, bc, ac usw. stehen aber entsprechend senkrecht auf den Abschnitten AB, BC, AC usw. *Hieraus folgt, daß die Figur abcd ähnlich der Figur ABCD und in bezug auf die letztere um 90° gedreht ist.*

Somit stehen die Abschnitte, die die Eckpunkte des Geschwindigkeitsplanes verbinden, senkrecht auf den Abschnitten, welche die entsprechenden Punkte der ebenen Figur verbinden.

Der letzte Umstand gibt die Möglichkeit, einen Geschwindigkeitsplan zu konstruieren, wenn *Größe und Richtung der Geschwindigkeit eines Punktes und die Richtung der Geschwindigkeit eines anderen Punktes der ebenen Figur* bekannt sind.

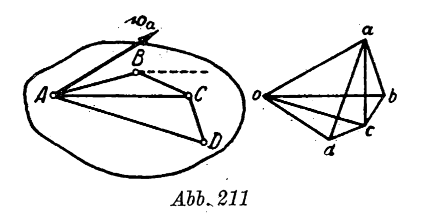


Abb. 211

Wir nehmen an, daß die Größe und Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A und die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes B gegeben seien (Abb. 211). Die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes B ist in der Abbildung durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Es soll der Geschwindigkeitsplan für die Punkte A, B, C und D konstruiert werden.

Zu diesem Zweck tragen wir von einem willkürlichen Punkte o den Abschnitt oa ab, der der Größe und Richtung nach die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ darstellt. Danach ziehen wir durch den Punkt o die Gerade ob, die der vorgegebenen Richtung der Geschwindigkeit des Punktes B parallel ist. Von dem Punkte a aber ziehen wir eine Gerade $ab \perp AB$. Im Schnittpunkt der gezogenen Geraden befindet sich der Eckpunkt b des Geschwindigkeitsplanes. Ferner ziehen wir $ac \perp AC$ und $bc \perp BC$. Durch den Schnitt der Geraden ac und bc ist der Eckpunkt c bestimmt. Schließlich finden wir den Eckpunkt d, wenn wir $ad \perp AD$ und $cd \perp CD$ ziehen. Die Strahlen ob, oc und od bestimmen sowohl Größe als auch Richtung der Geschwindigkeiten der Punkte B, C und D.

Die Konstruktion eines Geschwindigkeitsplanes ist ein sehr geeignetes Verfahren zur graphischen Bestimmung der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte eines Mechanismus, dessen einzelne Teile eine eben-parallele Bewegung ausführen. Wir können die Geschwindigkeitspläne für die einzelnen Glieder des Mechanismus so konstruieren, wie es eben erklärt wurde. Eine wesentliche Vereinfachung wird dadurch erreicht, daß man alle einzelnen Geschwindigkeitspläne in einer Zeichnung konstruieren kann. Auf diese Weise erhalten wir den Geschwindigkeitsplan für den gesamten Mechanismus.

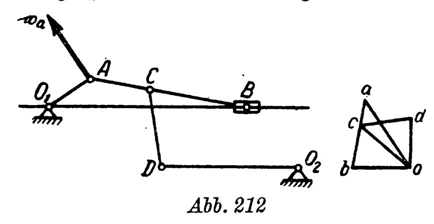


Abb. 212

Wir werden das Gesagte an Beispielen erläutern.

Beispiel 47. An der Kurbelstange AB eines Kurbelmechanismus O_1AB sei im Punkte C der Stab CD gelenkig befestigt, dessen Ende D mit dem Schwinghebel DO_2 verbunden ist, welcher um die feste Achse O_2 rotiert (Abb. 212). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A ist gegeben. Der Geschwindigkeitsplan für die Punkte A, B, C und D soll konstruiert werden.

Wir konstruieren zuerst den Geschwindigkeitsplan für die Kurbelstange AB. Uns sind Größe und Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A und die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes B gegeben. Von einem willkürlichen Punkte o tragen wir den Abschnitt ab, der der Größe und Richtung nach die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ darstellt ($\mathfrak{v}_a \perp O_1A$). Darauf ziehen wir vom Punkte o eine Gerade $ob \parallel O_1B$ und vom Punkte a die Gerade $ab \perp AB$; der Schnitt dieser Geraden bestimmt den Eckpunkt b des Geschwindigkeitsplanes. Teilen wir den Abschnitt ab im Verhältnis $AC: BC$, so finden wir den Punkt c. Der Strahl oc bestimmt Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Punktes C.

Wir gehen nun zu dem Stab CD über. Wir haben soeben die Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Punktes C bestimmt, außerdem ist uns die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes D bekannt (sie ist senkrecht zu O_2D gerichtet). Den Geschwindigkeitsplan für den Stab CD konstruieren wir in derselben Zeichnung, auf der wir den Geschwindigkeitsplan für die Kurbelstange AB konstruiert haben. Zu diesem Zweck ziehen wir von dem Punkte o die Gerade od, die parallel zu der Richtung der Geschwindigkeit des Punktes D verläuft (d. h. $od \perp O_2D$), und von dem Punkte c die Gerade $cd \perp CD$. Im Schnitt dieser Geraden erhalten wir den Eckpunkt d.

Die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C und D werden durch die Strahlen oa, ob, oc und od dargestellt.

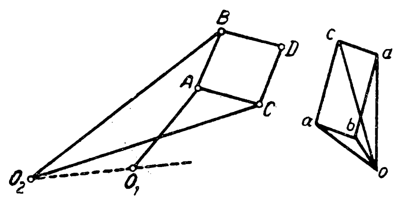


Abb. 213

Beispiel 48. Der Inversor von Lipkin besteht aus sieben Stäben: vier Stäbe gleicher Länge bilden den Rhombus $ABCD$, der Punkt A ist mit dem Stabe O_1A verbunden, der sich um die feste Achse O_1 dreht, die Punkte B und C sind mit Stäben gleicher Länge O_2B und O_2C verbunden, die um die feste Achse O_2 rotieren. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A ist gegeben. Der Geschwindigkeitsplan soll für die Punkte A, B, C und D konstruiert werden (Abb. 213).

Wir wenden uns dem Stabe AB zu. Von einem beliebigen Punkt o tragen wir den Abschnitt oa ab, welcher der Größe und Richtung nach die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A darstellt (natürlich ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ senkrecht zum Stabe O_1A gerichtet). Darauf legen wir durch den Punkt o die Gerade ob, die parallel zu der Geschwindigkeit des Punktes B verläuft (d. h. senkrecht zum Stabe O_2B), und durch den Punkt a die Gerade ab, die senkrecht zu AB verläuft. Im Schnittpunkt dieser Geraden erhalten wir den Eckpunkt b.

Wir gehen zum Stabe AC über. Durch den Punkt o ziehen wir die Gerade oc, die parallel zur Geschwindigkeit des Punktes C verläuft (d. h. senkrecht zum Stabe O_2C), und durch den Punkt a die Gerade ac, die senkrecht zu AC verläuft. Im Schnitt dieser Geraden finden wir den Eckpunkt c. Schließlich kommen wir zu den Stäben BD und CD. Durch den Punkt b ziehen wir die Gerade bd, senkrecht zu BD, und die Gerade cd durch den Punkt c, die senkrecht zu CD verläuft. Der Schnittpunkt dieser Geraden ergibt den Eckpunkt d.

Mit den Strahlen oa, ob, oc und od werden Größen und Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C und D bestimmt.

Man kann zeigen, daß der Punkt D eine gerade Linie beschreibt, die senkrecht zu der Geraden O_1O_2 verläuft, wenn $O_1A = O_1O_2$ ist. Ist jedoch der Abstand O_1A nicht gleich O_1O_2, so beschreibt der Punkt D einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt sich auf der Geraden O_1O_2 befindet. Wir werden uns mit dem Beweis dieses Satzes nicht befassen.

§ 106. Die Beschleunigungen der Punkte einer ebenen Figur. Das momentane Beschleunigungszentrum

Wir wenden uns der Ermittlung der Beschleunigungen verschiedener Punkte einer ebenen Figur zu. Dazu denken wir uns die Bewegung einer ebenen Figur (Abb. 214) zerlegt in eine translative (fortschreitende) Bewegung zusammen mit dem Punkte O und eine relative (rotierende) Bewegung in bezug auf diesen Pol. Die Beschleunigung eines beliebigen Punktes M einer ebenen Figur kann mit Hilfe des Additionstheorems der Beschleunigungen ermittelt werden: Da die translative Bewegung eine fortschreitende ist, so ist die absolute Beschleunigung des Punktes M gleich der Summe translativer und relativer Beschleunigung.

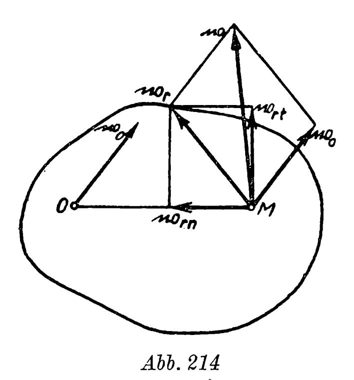


Abb. 214

Die translative Beschleunigung des Punktes M ist gleich der Beschleunigung $\mathfrak{w}_0$ des Poles O. Die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ des Punktes M ist aber eine Beschleunigung in Richtung der rotierenden Bewegung dieses Punktes um den Pol O. Sie setzt sich aus der Zentripetalbeschleunigung, deren Größe

$$w_{rn} = OM \cdot \omega^2$$

ist und die vom Punkte M nach dem Pol O gerichtet ist, und der rotierenden Beschleunigung, deren Größe

$$w_{rt} = OM \cdot \varepsilon$$

ist und die senkrecht zum Abschnitt OM verläuft, zusammen. Mit den Buchstaben ω und ε sind die Winkelgeschwindigkeit bzw. die Winkelbeschleunigung der Figur bezeichnet.[1]

Die absolute Beschleunigung des Punktes M ist die Diagonale des aus den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_r$ konstruierten Parallelogramms. Wir erhalten folgendes Theorem: *Die Beschleunigung eines beliebigen Punktes einer ebenen Figur ist gleich der Summe aus der Beschleunigung des Poles und der Beschleunigung der rotierenden Bewegung um diesen Pol.*

Wir werden zeigen, daß es in jedem gegebenen Augenblick einen Punkt der ebenen Figur gibt, dessen Beschleunigung in diesem Augenblick gleich Null ist.

Wir wählen als Pol den Punkt O (Abb. 215) und bezeichnen die Beschleunigung des Poles mit $\mathfrak{w}_0$. Darauf ermitteln wir den Winkel α, der in den Grenzen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt und die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

befriedigt. Natürlich ist $\varepsilon > 0$, wenn $\alpha > 0$ und $\varepsilon < 0$, wenn $\alpha < 0$ ist.

[1] Im Fall $\varepsilon > 0$ verläuft die Rotationsbeschleunigung $\mathfrak{w}_{rt}$ so, wie in Abb. 214 gezeigt, ist jedoch $\varepsilon < 0$, so verläuft die Beschleunigung $\mathfrak{w}_{rt}$ nach der entgegengesetzten Seite.

Wir tragen vom Punkte O unter dem Winkel α zu der Beschleunigung $\mathfrak{w}_0$ den Abschnitt

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

ab. Dabei tragen wir den Winkel α von der Beschleunigung $\mathfrak{w}_0$ aus im Gegenzeigersinn ab, wenn $\alpha > 0$, und nach der entgegengesetzten Richtung, wenn $\alpha < 0$ (die Abb. 215 entspricht dem Fall $\alpha > 0$). Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß die Beschleunigung des Punktes Q gleich Null ist.

Tatsächlich ist die Beschleunigung des Punktes Q nach dem oben Gesagten gleich der Summe der Beschleunigung $\mathfrak{w}_0$ des Punktes O und der Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ der rotierenden Bewegung um den Punkt O. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ aber setzt sich aus der zentripetalen Beschleunigung $w_{rn} = OQ \cdot \omega^2$ und der Rotationsbeschleunigung $w_{rt} = OQ \cdot \varepsilon$ zusammen. Folglich ist

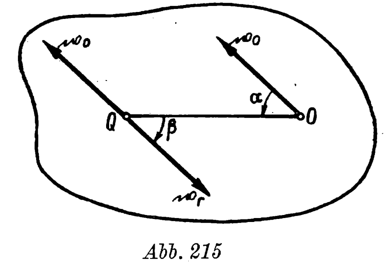


Abb. 215

$$w_r = \sqrt{w_{rt}^2 + w_{rn}^2} = OQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$= \frac{w_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = w_0 .$$

Andererseits bildet die Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ mit der Richtung des Abschnittes QO den Winkel β (Abb. 215), der die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{w_{rt}}{w_{rn}} = -\frac{OQ \cdot \varepsilon}{OQ \cdot w^2} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\operatorname{tg} \alpha$$

befriedigt.

Der Winkel β liegt zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ (wobei $\beta < 0$, wenn $\varepsilon > 0$, und $\beta > 0$, wenn $\varepsilon < 0$). In diesem Falle erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\beta = -\alpha .$$

Folglich ist die Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ gleich und entgegengesetzt gerichtet der Beschleunigung des Poles $\mathfrak{w}_0$. Hieraus schließen wir, daß die absolute Beschleunigung des Punktes Q, die sich aus den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_r$ zusammensetzt, gleich Null sein muß.

Der Punkt Q, dessen Beschleunigung im gegebenen Zeitpunkt gleich Null ist, heißt *momentanes Beschleunigungszentrum.*[1]

[1] Wir bemerken, daß $OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty$ ist, wenn $\omega = 0$ und $\varepsilon = 0$, und daß folglich ein momentanes Beschleunigungszentrum dann nicht existiert (oder es befindet sich im Unendlichen). Wenn $\omega = 0$ und $\varepsilon = 0$, sind die Beschleunigungen aller Punkte der ebenen Figur bei der rotierenden Bewegung um den Pol O gleich Null, woraus folgt, daß die absoluten Beschleunigungen aller Punkte der Figur gleich der Beschleunigung des Poles sind. Mit anderen Worten, im Fall $\omega = 0$ und $\varepsilon = 0$ haben alle Punkte der ebenen Figur gleiche Beschleunigungen.

Wir wollen nun voraussetzen, daß das momentane Beschleunigungszentrum Q als Pol gewählt wird. Wenn man nun das am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Theorem anwendet und beachtet, daß jetzt die Beschleunigung des Poles gleich Null ist, ergibt sich folgendes Resultat: *Die Beschleunigung eines beliebigen Punktes einer ebenen Figur ist die Beschleunigung bei der rotierenden Bewegung um das momentane Beschleunigungszentrum.*

Wir bezeichnen den Abstand QM des Punktes M vom momentanen Beschleunigungszentrum Q mit r_1 (Abb. 216) und schließen, daß sich die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M aus der Komponente, die der Größe nach gleich

$$w_{rt} = r_1 \varepsilon$$

ist und senkrecht zum Abschnitt QM verläuft, und aus der Komponente, die der Größe nach gleich

$$w_{rn} = r_1 \omega^2$$

ist und vom Punkt M nach dem Punkt Q verläuft, zusammensetzt. Die Größe der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ wird nach der Formel

$$w = r_1 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

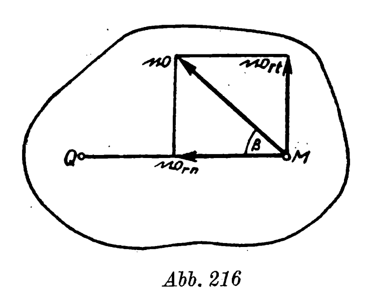


Abb. 216

bestimmt, die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ bildet mit dem Abschnitt MQ den Winkel β, der durch die Formel

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{w_{rt}}{w_{rn}} = -\frac{\varepsilon}{\omega}$$

bestimmt wird und in den Grenzen $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen ist.

Wir sehen, daß in jedem gegebenen Augenblick die Beschleunigungen der Punkte einer ebenen Figur so geartet sind, als führte die Figur eine Drehung um den festen Punkt Q aus. Daher erhielt der Punkt Q den Namen „Beschleunigungszentrum". Durch das Wort „momentan" wird unterstrichen, daß der Punkt Q als Beschleunigungszentrum nur für den gegebenen Zeitpunkt erscheint. Verschiedenen Zeiten entsprechen verschiedene momentane Beschleunigungszentren.

Es muß erwähnt werden, daß das momentane Geschwindigkeitszentrum P und das momentane Beschleunigungszentrum Q, allgemein gesagt, nicht zusammenfallen. Davon kann man sich an Hand des folgenden einfachen Beispieles überzeugen: Wir stellen uns einen Kreis vor, der gleichförmig (ohne zu gleiten) auf einer Geraden rollt (Abb. 217). Da sich der Mittelpunkt des Kreises geradlinig und gleichförmig bewegt, ist seine Beschleunigung gleich Null, und folglich erscheint er als momentanes Beschleunigungszentrum Q für den rollenden Kreis. Das momentane Geschwindigkeitszentrum P aber befindet sich, wie wir bereits wissen, im Berührungspunkt des Kreises mit jener Geraden, auf der dieser Kreis rollt.

Wenn wir wissen, daß das momentane Beschleunigungszentrum Q, allgemein gesagt, nicht mit dem momentanen Geschwindigkeitszentrum P zusammenfällt, muß die Aufmerksamkeit auch darauf gerichtet werden, daß die Komponenten $\mathfrak{w}_{rt}$ und $\mathfrak{w}_{rn}$, in welche die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M in Abb. 216 zerlegt ist, allgemein gesagt, nicht mit der tangentialen und der normalen Beschleunigung des Punktes M zusammenfallen. Um die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M in eine tangentiale und eine normale Beschleunigung zu zerlegen, muß man sie in zwei durch den Punkt M verlaufende Komponenten der tangentialen und der normalen Beschleunigung an die Bewegungsbahn zerlegen. Die Richtung der Tangente an die Bewegungsbahn des Punktes M aber fällt mit der Richtung ihrer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zusammen (Abb. 218). Also fällt die Richtung der Normalen zur Bewegungsbahn mit der Richtung des Abschnittes MP zusammen, der den Punkt M mit dem momentanen Geschwindigkeitszentrum verbindet (aber nicht mit dem momentanen Beschleunigungszentrum Q).

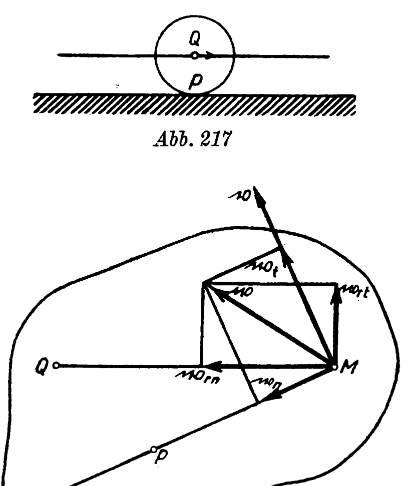


Abb. 217

Abb. 218

Also müssen wir, um die tangentiale und die normale Beschleunigung des Punktes M zu erhalten, die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in zwei Komponenten zerlegen, die auf der Geraden MP bzw. senkrecht zu dieser Geraden verlaufen. Die Größen der tangentialen und der normalen Beschleunigung $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$ befriedigen die Gleichungen

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

wobei ϱ der Krümmungsradius der Bewegungsbahn ist.[1]

§ 107. Der Beschleunigungsplan

Wir bezeichnen die Beschleunigungen der Punkte A, B, C und D irgendeiner sich bewegenden Figur mit $\mathfrak{w}_a, \mathfrak{w}_b, \mathfrak{w}_c$ und $\mathfrak{w}_d$ (Abb. 219). Von einem willkürlichen Punkt o_1 (Abb. 220) tragen wir die Abschnitte o_1a_1, o_1b_1, o_1c_1, o_1d_1 ab, die der Größe und Richtung nach die Beschleunigungen $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$, $\mathfrak{w}_c$, $\mathfrak{w}_d$ darstellen, und verbinden die Punkte a_1, b_1, c_1 und d_1 durch gerade Linien. Das gewonnene Polygon heißt *Be-*

[1] Wenn C (Abb. 218) das Krümmungszentrum der Bewegungsbahn ist, gilt $\varrho = MC$. Man darf nicht annehmen, daß das Krümmungszentrum C mit dem momentanen Geschwindigkeitszentrum P zusammenfällt.

schleunigungsplan. Wir werden die Abschnitte o_1a_1, o_1b_1, o_1c_1, o_1d_1 Strahlen nennen und die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 Eckpunkte des Beschleunigungsplanes.

Wir werden zeigen, daß *der Abschnitt a_1b_1, der die Eckpunkte a_1 und b_1 verbindet, der Größe und Richtung nach die Beschleunigung des Punktes B bei der rotierenden Bewegung um den Punkt A darstellt.*

Wir wählen den Punkt A als Pol. Am Anfang des § 106 wurde gezeigt, daß die Beschleunigung eines beliebigen Punktes der ebenen Figur gleich der Summe der Beschleunigungen des Pols und des gegebenen Punktes bei der rotierenden Bewegung

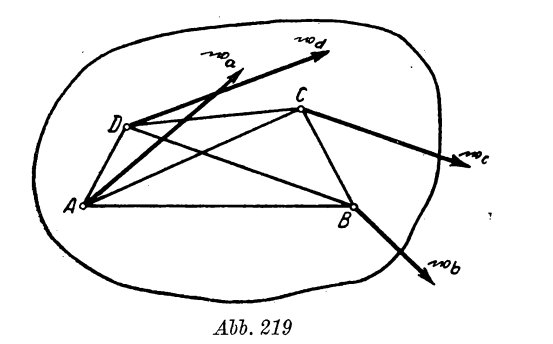


Abb. 219

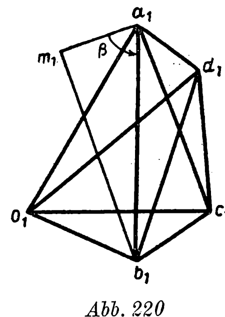


Abb. 220

um diesen Pol ist. Auf Grund dieses Theorems erhalten wir, wenn wir die Beschleunigung des Punktes B bei der Rotationsbewegung um den Punkt A mit $\mathfrak{w}_{ab}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{w}_b = \mathfrak{w}_a + \mathfrak{w}_{ab}. \tag{1}$$

Andererseits folgt aus dem Dreieck $o_1a_1b_1$

$$\overline{o_1 b_1} = \overline{o_1 a_1} + \overline{a_1 b_1}$$

oder

$$\mathfrak{w}_b = \mathfrak{w}_a + \overline{a_1 b_1}. \tag{2}$$

Wenn wir (1) und (2) vergleichen, können wir folgern, daß

$$\overline{a_1 b_1} = \mathfrak{w}_{ab}$$

ist.

Wir zerlegen nun den Vektor $\overline{a_1b_1}$ in die zwei Komponenten $\overline{a_1m_1}$ und $\overline{m_1b_1}$, von denen die eine parallel zum Abschnitt AB verläuft, die andere aber senkrecht auf ihm steht. Diese Komponenten stellen die zentripetale und die rotierende Komponente der Beschleunigung $\mathfrak{w}_{ab}$ dar, folglich ist

$$a_1 m_1 = AB \cdot \omega^2, \qquad m_1 b_1 = AB \cdot |\varepsilon|.$$

Dabei sind ω und ε Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der gegebenen ebenen Figur. Hieraus schließen wir, daß

$$a_1 b_1 = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad \sphericalangle m_1 a_1 b_1 = \beta,$$

wobei

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

ist.

Folglich bildet die Richtung des Abschnittes $a_1 b_1$ mit der Richtung des Abschnittes AB einen Winkel, der gleich $180° + \beta$ ist (im gegebenen Falle ist $\varepsilon < 0$ und $\beta > 0$).

Alles, was für den Abschnitt $a_1 b_1$ gesagt ist, kann für die Abschnitte $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ usw. wiederholt werden. Wir schließen, daß

$$b_1 c_1 = BC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$a_1 c_1 = AC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

usw. gilt.

Die Richtungen der Abschnitte $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ usw. bilden mit den Richtungen der Abschnitte BC, AC usw. Winkel, die gleich $180° + \beta$ sind.

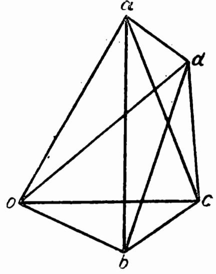


Abb. 221

Hieraus folgt, daß die Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ ähnlich der Figur $ABCD$ und in bezug auf die letztere um den Winkel $180° + \beta$ gedreht ist.

Nehmen wir an, daß die Figur *oabcd* (Abb. 221) der Geschwindigkeitsplan für die Punkte A, B, C und D sei (der so wie in § 105 konstruiert ist). Wir wissen, daß der Abschnitt *ab* die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes B um den Punkt A darstellt, d. h.

$$ab = AB \cdot |\omega|.$$

Hieraus schließen wir:

$$a_1 m_1 = AB \cdot \omega^2 = \frac{\overline{ab^2}}{AB}.$$

Die gewonnene Abhängigkeit zwischen den Abschnitten AB, *ab* und $a_1 m_1$ gibt die Möglichkeit, einen Beschleunigungsplan zu konstruieren, wenn Größe und Richtung der Beschleunigung eines Punktes der ebenen Figur sowie die Richtung der Beschleunigung eines anderen Punktes gegeben sind und wenn außerdem der Geschwindigkeitsplan bekannt ist.

Nehmen wir an, daß uns Größe und Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ des Punktes A (Abb. 219), die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_b$ des Punktes B und der Geschwindigkeitsplan *oabcd* gegeben seien (Abb. 221). Um einen Geschwindigkeitsplan für die Punkte A, B, C und D zu konstruieren, tragen wir von einem willkürlichen Punkt o_1 (Abb. 220) den Abschnitt $o_1 a_1$ ab, welcher der Größe und Richtung nach die gegebene Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ darstellt. Darauf tragen wir vom Punkte a_1 parallel zu BA den Abschnitt

$$a_1 m_1 = \frac{\overline{ab^2}}{AB}$$

ab.

Wenn wir vom Punkte m_1 eine Gerade ziehen, die senkrecht zu AB verläuft, und vom Punkte o_1 eine Gerade, die parallel zu der gegebenen Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_b$ verläuft, finden wir im Schnittpunkt dieser Geraden den Eckpunkt b_1.

Nachdem wir den Punkt b_1 konstruiert haben, tragen wir den Abschnitt a_1b_1 ab und finden den Winkel $\beta = \sphericalangle m_1a_1b_1$.

Um die Konstruktion des Beschleunigungsplanes zu beenden, brauchen wir nur die Geraden a_1c_1, b_1c_1 a_1d_1 und b_1d_1 unter dem Winkel $180° + \beta$ zu den Richtungen AC, BC, AD und BD zu ziehen; der Schnitt dieser beiden ersten Geraden bestimmt den Eckpunkt c_1 und der Schnitt der beiden letzten Geraden den Eckpunkt d_1.

Wenn wir die Beschleunigungen verschiedener Punkte irgendeines ebenen Mechanismus graphisch bestimmen wollen, konstruieren wir Beschleunigungspläne für die verschiedenen Glieder des Mechanismus. Alle einzelnen Beschleunigungspläne kann man in einer Zeichnung konstruieren, womit man dann den Beschleunigungsplan für den gesamten Mechanismus erhält.

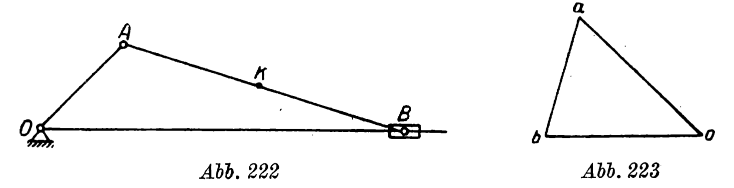


Abb. 222 *Abb. 223*

Beispiel 49. Die Kurbel OA eines Kurbeltriebes OAB (Abb. 222) rotierte gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Beschleunigungsplan für die Kurbelstange AB soll bestimmt werden.

Zuerst konstruieren wir den Geschwindigkeitsplan für die Kurbelstange AB. Vom Punkte o (Abb. 223) tragen wir den Abschnitt oa ab, der die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A darstellt. Wir wissen, daß

$$v_a = OA \cdot \omega$$

ist. In der Abbildung kann die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ in einem beliebigen Maßstab angenommen werden. Darauf ziehen wir vom Punkte a eine zu AB senkrecht verlaufende Gerade und vom Punkte o eine Gerade, die parallel zur Geschwindigkeit des Punktes B ist, d. h. parallel zu OB. Durch den Schnittpunkt dieser Geraden wird der Punkt b bestimmt. Die Figur oab ist der Geschwindigkeitsplan für die Kurbelstange AB. Wir gehen zur Konstruktion des Beschleunigungsplanes über. Uns sind Größe und Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ des Punktes A und die Richtung der Beschleunigung des Punktes B bekannt. Es gilt

$$w_a = BA \cdot \omega^2 = \frac{v_a^2}{OA} = \frac{\overline{oa}^2}{OA}.$$

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ verläuft vom Punkte A nach dem Punkte O, die Beschleunigung des Punktes B jedoch verläuft auf der Geraden OB.

Vom Punkte o_1 (Abb. 224) tragen wir den Abschnitt o_1a_1 ab, der die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ darstellt. Vom Punkte a_1 parallel zu BA tragen wir den Abschnitt

$$a_1\,m_1 = \frac{\overline{ab}^2}{AB}$$

ab.

Darauf ziehen wir vom Punkte m_1 eine zu AB senkrechte Gerade und vom Punkte o_1 eine Gerade, die parallel zu der Richtung der Beschleunigung des Punktes B verläuft, d. h. parallel zu der Geraden OB. Durch den Schnittpunkt dieser Geraden wird der Punkt b_1 bestimmt.

Nun sind noch die Punkte a_1 und b_1 durch eine gerade Linie zu verbinden. Die Figur $o_1a_1b_1$ ist der Beschleunigungsplan für die Kurbelstange AB. Wenn wir die Beschleunigung irgendeines Punktes K der Kurbelstange AB bestimmen wollen, finden wir den Punkt k_1, indem wir den Abschnitt a_1b_1 im Verhältnis $AK{:}KB$ teilen. Der Abschnitt o_1k_1 stellt dann die Beschleunigung des Punktes K dar.

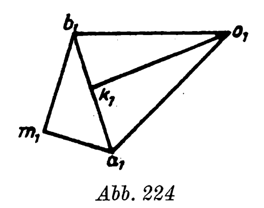


Abb. 224

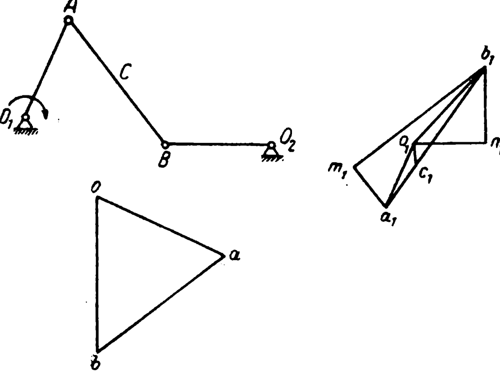


Abb. 225

Beispiel 50. Die Schwinghebel O_1A und O_2B, die sich um die festen Achsen O_1 bzw. O_2 drehen, sind durch die Kurbelstange AB verbunden, $O_1A = O_2B = 20$ cm, $AB = 30$ cm (Abb. 225). Durch Konstruktion eines Beschleunigungsplanes ist für die Stellung des Mechanismus, die in der Abbildung angegeben ist, die Beschleunigung des Punktes C der Kurbelstange zu ermitteln, der sich im Abstand $AC = 10$ cm von ihrem Ende A befindet, unter der Voraussetzung, daß der Punkt A sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a = 20$ cm/s bewegt (nach der in der Abbildung angegebenen Richtung).

Wir beginnen mit der Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes. Nachdem wir für diese Konstruktion den Maßstab 1 cm = 10 cm/s gewählt haben, tragen wir vom Punkte o den Abschnitt oa ab, der (der Größe und Richtung nach) die uns gegebene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A darstellt.

Darauf ziehen wir vom Punkte o die Gerade ob, die senkrecht zu dem Schwinghebel O_2B verläuft, und von dem Punkte a die Gerade ab, die senkrecht zur Kurbelstange AB verläuft. Durch den Schnittpunkt dieser beiden Geraden wird der Eckpunkt b des Geschwindigkeitsplanes bestimmt. Mit den Abschnitten ob und ab werden die absolute Geschwindigkeit v_b des Punktes B bzw. die Drehgeschwindigkeit v_{ab} des Punktes B um

den Punkt A dargestellt. Nachdem wir diese Abschnitte im angenommenen Maßstab abgemessen haben, erhalten wir:

$$v_b = 20{,}6 \text{ cm/s},$$

$$v_{ab} = 20{,}3 \text{ cm/s}.$$

Wir gehen nun zur Konstruktion der Beschleunigungen über. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ des Punktes A ist uns bekannt. Da sich dieser Punkt auf dem Kreis mit einer der Größe nach konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ bewegt, ist seine Beschleunigung nach dem Zentrum O_1 gerichtet und der Größe nach gleich

$$w_a = \frac{v_a^2}{O_1A} = 20 \text{ cm/s}^2.$$

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_b$ des Punktes B ist uns weder der Größe noch der Richtung nach bekannt. Dieser Punkt rotiert um das Zentrum O_2, wobei er sich, allgemein gesagt, ungleichförmig bewegt. Die Beschleunigung setzt sich aus der normalen und der tangentialen Komponente zusammen. Von diesen zwei Komponenten ist uns nur die normale Komponente $\mathfrak{w}_{bn}$ bekannt: Sie verläuft vom Punkte B nach dem Punkte O_2 und ist gleich

$$w_{bn} = \frac{v_b^2}{O_2B} = 21{,}4 \text{ cm/s}^2.$$

Bei der Konstruktion des Beschleunigungsplanes wollen wir auf folgende Weise verfahren. Nachdem wir den Maßstab 1 cm = 20 cm/s² gewählt haben, tragen wir vom Punkt O_1 (Abb. 225) parallel zu der AO_1-Richtung den Abschnitt o_1a_1 ab, der im angenommenen Maßstab die Beschleunigung $\mathfrak{w}_a$ darstellt. Darauf tragen wir vom Punkte o_1 parallel der Richtung BO_2 den Abschnitt o_1n_1 ab, der die Normalkomponente $\mathfrak{w}_{bn}$ der Beschleunigung des Punktes B darstellt. Der Eckpunkt b_1 des Beschleunigungsplanes muß auf der Geraden n_1b_1 liegen, die vom Punkte n_1 senkrecht zum Abschnitt o_1n_1 gezogen ist.

Gehen wir zu der Beschleunigung des Punktes B bei der rotierenden Bewegung um den Punkt A über, so erhalten wir für die Normalkomponente dieser Beschleunigung:

$$\frac{v_{ab}^2}{AB} = 13{,}7 \text{ cm/s}^2.$$

Sie verläuft vom Punkte B nach dem Punkte A. Tragen wir im Beschleunigungsplan vom Punkte a_1 den Abschnitt a_1m_1 ab, der diese Beschleunigung darstellt, und ziehen durch den Punkt m_1 die Gerade m_1b_1, die senkrecht zum Abschnitt a_1m_1 verläuft, so erhalten wir die zweite Gerade, auf welcher der Eckpunkt b_1 liegen muß. Hieraus folgt, daß der Punkt b_1 der Schnittpunkt der von uns gezogenen Geraden n_1b_1 und m_1b_1 ist. Mit dem Ziehen der Geraden a_1b_1 ist die Konstruktion des Beschleunigungsplanes abgeschlossen.

Der Abschnitt o_1b_1 stellt die Beschleunigung des Punktes B dar. Wählen wir auf der Geraden a_1b_1 den Abschnitt $a_1c_1 = \frac{1}{3}\, a_1b_1$, so finden wir den Punkt c_1, dessen Verbindung mit dem Punkte o_1 den Strahl o_1c_1 ergibt, der die gesuchte Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ des Punktes C darstellt. Nachdem wir den Abschnitt o_1c_1 im angenommenen Maßstab gemessen haben, erhalten wir

$$w_c = 5{,}5 \text{ cm/s}^2.$$

Die Richtung dieser Beschleunigung wird durch die Richtung des Strahles o_1c_1 bestimmt.

§ 108. Die Verschiebung einer ebenen Figur. Das momentane Geschwindigkeitszentrum als Grenzlage des Rotationszentrums

Bei unserer Untersuchung der eben-parallelen Bewegung eines starren Körpers gingen wir von der Zerlegung der ebenen Bewegung in einen fortschreitenden und einen rotierenden Anteil aus. Diese Zerlegung gab uns die Möglichkeit, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte der ebenen Figur zu bestimmen, und brachte uns auch an die Begriffe des momentanen Geschwindigkeitszentrums und des momentanen Beschleunigungszentrums. Wir werden nun zeigen, daß man zum Begriff des momentanen Geschwindigkeitszentrums auch auf einem anderen Wege gelangen kann.

Wir beginnen mit der Beweisführung des folgenden Theorems (das SCHALsches Theorem genannt wird): *Eine ebene Figur kann man aus jeder gegebenen Lage in jede andere Lage durch Drehung um einen Punkt verrücken.*

Einleitend wollen wir erwähnen, daß die Lage einer ebenen Figur, die sich in der gegebenen Ebene bewegt, eindeutig durch die Lage zweier Punkte bestimmt ist.

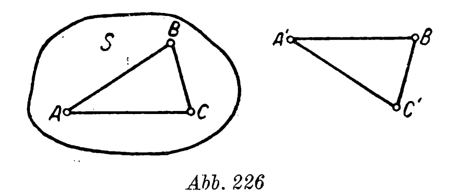


Abb. 226

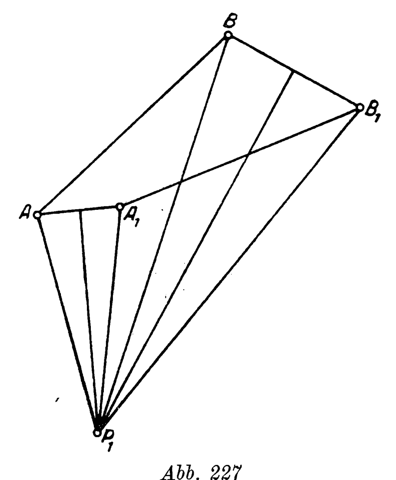


Abb. 227

Nehmen wir an, daß zwei Punkte A und C der ebenen Figur S (Abb. 226) in einem bestimmten Augenblick die Lagen A' und C' einnehmen. Damit ist die Lage der gesamten ebenen Figur im betrachteten Zeitpunkt eindeutig bestimmt. Um die Lage, die in diesem Zeitpunkt ein beliebiger dritter Punkt B unserer Figur einnimmt, zu ermitteln, genügt es, mit dem Abschnitt $A'C'$ das Dreieck $A'B'C'$ zu konstruieren, das gleich dem Dreieck ABC ist.

Auf Grund dieser Bemerkung kann die Untersuchung der Bewegung der ebenen Figur durch die Untersuchung der Bewegung zweier Punkte oder, was dasselbe ist, des diese Punkte verbindenden Abschnittes ersetzt werden.

Wir gehen nun zur Beweisführung unseres Theorems über.

Nehmen wir an, daß der Abschnitt AB (der zu einer ebenen Figur gehört, die in der Abbildung nicht dargestellt ist) irgendeine Bewegung in der Abbildungsebene ausführt (Abb. 227). Wir nehmen weiter an, daß dieser Abschnitt zur Zeit t die Lage AB einnimmt und zur Zeit $t + \Delta t$ die Lage A_1B_1. Wir werden zeigen, daß der Abschnitt aus der ersten Lage in die zweite durch Drehung um einen bestimmten Punkt verrückt werden kann.

Wir ziehen die Abschnitte AA_1 und BB_1 und errichten in den Punkten, die diese Abschnitte halbieren, Senkrechte zu denselben. Wir werden gleich sehen, daß der Schnittpunkt dieser Senkrechten das Rotationszentrum P_1 ist. Durch die Drehung um dasselbe kann der Abschnitt AB in die Stellung A_1B_1 verschoben werden.

Um uns davon zu überzeugen, ziehen wir die Geraden AP_1, BP_1, A_1P_1, B_1P_1. Die Dreiecke ABP_1 und $A_1B_1P_1$ sind gleich (Gleichheit der drei Seiten). Folglich ist

$$\sphericalangle A P_1 B = \sphericalangle A_1 P_1 B_1 .$$

Wenn wir von beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel $\sphericalangle A_1P_1B$ abziehen, erhalten wir:

$$\sphericalangle A P_1 A_1 = \sphericalangle B P_1 B_1 .$$

Wir bezeichnen die gleichen Winkel $\sphericalangle AP_1A_1$ und $\sphericalangle BP_1B_1$ mit $\Delta\varphi$ und drehen den Abschnitt AB um den Punkt P_1 um den Winkel $\Delta\varphi$. Nach dieser Drehung wird der Punkt A die Lage A_1, der Punkt B die Lage B_1 einnehmen. Folglich kann der Abschnitt AB in die Lage A_1B_1 durch eine Drehung um den Punkt P_1 um den Winkel $\Delta\varphi$ verrückt werden.

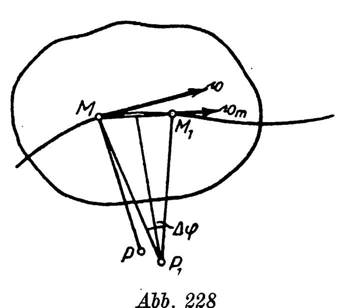


Abb. 228

Somit haben wir uns überzeugt, daß eine ebene Figur aus der zur Zeit t eingenommenen Lage in die der Zeit $t + \Delta t$ entsprechende Lage durch eine Drehung um einen Punkt P_1 um einen Winkel $\Delta\varphi$ verrückt werden kann.[1] Wir wollen nun den Zeitraum Δt gegen Null gehen lassen. Dann wird sich die zweite Lage der Figur der ersten nähern. Gleichzeitig wird sich das Rotationszentrum P_1 einer Grenzlage nähern, die wir mit dem Buchstaben P bezeichnen, das Verhältnis $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ aber wird sich einem Grenzwert nähern, der die absolute Größe der Winkelgeschwindigkeit ω der ebenen Figur zur Zeit t ist:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right] = \omega .$$

Wir werden zeigen, daß die Grenzlage P des Rotationszentrums P_1 das momentane Geschwindigkeitszentrum der gegebenen Figur (das der Zeit t entspricht) ist.

Um sich davon zu überzeugen, genügt es zu zeigen, daß die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der ebenen Figur zur Zeit t eine rotierende Geschwindigkeit um den Punkt P ist. Wir betrachten irgendeinen Punkt M unserer ebenen Figur (Abb. 228) und kennzeichnen die Lagen, die dieser zu den Zeiten t (bezeichnet mit dem Buchstaben M) und $t + \Delta t$ (Lage M_1) einnimmt. Um die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M

[1] **Das bedeutet natürlich nicht, daß die *tatsächliche Bewegung* der ebenen Figur während der Zeit Δt eine Rotation um den Punkt P_1 ist. Wir haben nur gezeigt, *daß eine Figur aus der ersten Lage in die zweite durch Drehung um den Punkt P_1 um den Winkel $\Delta\varphi$ verrückt werden kann.***

zur Zeit t zu errechnen, nutzen wir den Umstand aus, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Grenzwert der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der gleichförmigen angenommenen Bewegung des Punktes M auf der Sehne MM_1 ist (siehe § 84).

Es gilt:

$$v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Verbinden wir die Punkte M und M_1 durch gerade Linien mit dem Rotationszentrum P_1, so erhalten wir ein gleichschenkliges Dreieck MM_1P_1, in dem der Winkel an der Spitze P_1 gleich $\Delta\varphi$ ist.

Aus diesem Dreieck lesen wir ab:

$$MM_1 = 2\,P_1M \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Folglich ist

$$v_m = 2\,P_1M\,\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}.$$

Gehen wir zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über, so erhalten wir

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}[v_m] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[P_1M\,\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right].$$

Es ist aber

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}[P_1M] = PM, \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right] = 1, \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right] = \omega.$$

Folglich finden wir, wenn wir PM mit r bezeichnen:

$$v = r\,\omega.$$

Andererseits bildet die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ mit der Richtung MP_1 einen Winkel, der gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}$ ist. Gehen wir zur Grenze über und beachten, daß $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta\varphi) = 0$ ist, so können wir schließen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit der Richtung MP einen rechten Winkel bildet.

Somit ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M der Größe nach gleich $v = r\omega$ (wobei $r = MP$ ist) und verläuft senkrecht zu PM, d. h., die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist die Rotationsgeschwindigkeit um den Punkt P.

Hieraus folgt, daß der Punkt P das momentane Geschwindigkeitszentrum der gegebenen ebenen Figur ist, das der Zeit t entspricht.

§ 109. Die Momentanpolkurve

Wir betrachten eine Reihe aufeinanderfolgender Zeiten t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$ usw. und nennen die Lagen, die in diesen Augenblicken von der ebenen Figur S eingenommen werden (Abb. 229), die 1., 2., 3., 4. usw. Lage der Figur. Wir wissen, daß eine ebene Figur aus jeder gegebenen Lage in jede andere Lage durch Drehung um einen Punkt um einen bestimmten Winkel verrückt werden kann. Wir nehmen an, daß die Figur S aus der ersten Lage in die zweite Lage durch Drehung um den Punkt P_1 um den Winkel $\Delta \varphi_1$, aus der zweiten Lage in die dritte durch Drehung um den Punkt P_2 um den Winkel $\Delta \varphi_2$, aus der dritten in die vierte durch Drehung um den Punkt P_3 um den Winkel $\Delta \varphi_3$ usw. verrückt werden kann. Wir vereinbaren, der Kürze halber die Drehungen um die Punkte P_1, P_2, P_3 usw. die 1., 2., 3. usw. Drehung zu nennen.

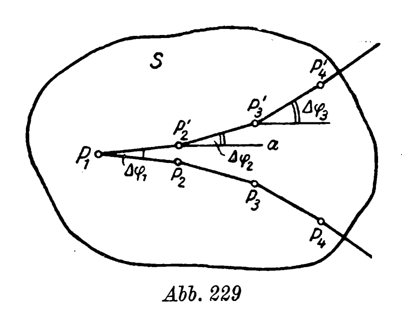


Abb. 229

Wenn wir die Punkte P_1, P_2, P_3, $P_4, \ldots$ nacheinander durch geradlinige Abschnitte verbinden, erhalten wir das Polygon $P_1P_2 P_3P_4 \ldots$, als dessen Eckpunkte die aufeinanderfolgenden Rotationszentren der Figur S erscheinen. Wir nennen dieses Polygon das Zentrumspolygon, und zwar das „unbewegliche“ Zentrumspolygon zum Unterschied von einem anderen Zentrumspolygon, von dem gleich die Rede sein wird.

Wir konstruieren den Punkt P_2' der ebenen Figur, der nach der ersten Drehung mit dem Punkte P_2 zusammenfällt und folglich das Rotationszentrum bei der zweiten Drehung ist. Zu diesem Zweck tragen wir vom Punkte P_1 den Abschnitt $P_1P_2' = P_1P_2$ unter dem Winkel $\Delta \varphi_1$ zur Geraden P_1P_2 ab, wobei der Winkel $\Delta \varphi_1$ von der Geraden P_1P_2 nach der Seite abgetragen wird, die entgegen dem Drehsinn der Rotation der Figur S um den Punkt P_1 gerichtet ist (in Abb. 229 werden die Drehungen um die Punkte P_1, P_2, $P_3, \ldots$ als im Uhrzeigersinn verlaufend vorausgesetzt).

Danach konstruieren wir den Punkt P_3' der Figur S, der nach der zweiten Drehung mit dem Punkte P_3 zusammenfällt und folglich das Rotationszentrum bei der dritten Drehung ist. Zu diesem Zweck tragen wir $\sphericalangle P_1P_3' = \sphericalangle P_1P_2P_3$ ab und legen durch den Punkt P_2' den Abschnitt $P_2'P_3' = P_2P_3$ unter dem Winkel $\Delta \varphi_2$ zu der Geraden $P_2'a$, wobei der Winkel $\Delta \varphi_2$ von der Geraden $P_2'a$ nach der Seite abgetragen wird, die entgegen dem Drehsinn der Drehung der Figur S um den Punkt P_2 gerichtet ist.

Entsprechend können wir die Punkte P_4', $P_5', \ldots$ der Figur S konstruieren, die nach der dritten, vierten, ... Drehung mit den Punkten P_4, $P_5, \ldots$ zusammenfallen und folglich die Rotationszentren bei der vierten, fünften, ... Drehung sind. Das Polygon $P_1P_2'P_3'P_4' \ldots$ nennen wir das „bewegliche“ Zentrumspolygon. Seine Eckpunkte sind die Punkte der Figur S, die als Rotationszentren bei aufeinanderfolgenden Drehungen der Figur erscheinen. Dieses Polygon ist fest mit der Figur S verbunden und bewegt sich zusammen mit dieser. Seine Bewegung können wir kurz charakterisieren, wenn wir sagen, daß bei einer angenommenen Bewegung der

Figur S, die aus einer Reihe aufeinanderfolgender Drehungen besteht, das bewegliche Zentrumspolygon ohne zu gleiten auf dem festen Zentrumspolygon abrollt.

Wir gehen nun zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Als Grenzlagen der Rotationszentren $P_1 P_2 P_3$ usw. erscheinen die momentanen Geschwindigkeitszentren der Figur S, die aufeinanderfolgenden Zeiten entsprechen. Die Grenzlage des Rotationszentrums P_1 ist das momentane Zentrum P, das der Zeit t entspricht (Abb. 230).

Gleichzeitig gehen bei einem Übergang von Δt gegen 0 die Seiten des unbeweglichen Polygons der Zentren gleichfalls gegen 0, ihre Zahl aber wächst unbegrenzt an. Im Grenzfall verwandelt sich das feste Polygon der Zentren in eine Kurve, die den geometrischen Ort der momentanen Geschwindigkeitszentren auf der unbeweglichen Ebene darstellt. Diese Kurve heißt *unbewegliche Momentanpolkurve*, wir bezeichnen sie mit K.

Das bewegliche Zentrumspolygon verwandelt sich im Grenzfall ebenfalls in eine Kurve, die den geometrischen Ort der momentanen Zentren

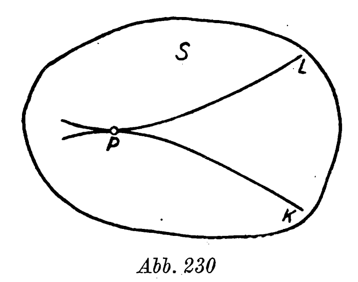


Abb. 230

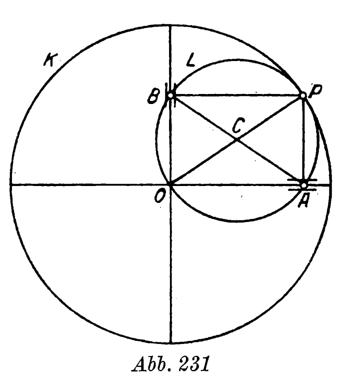


Abb. 231

auf der sich bewegenden Figur S darstellt. Diese Kurve ist unveränderlich mit der Figur S verbunden und bewegt sich mit dieser zusammen. Sie heißt *bewegliche Momentanpolkurve*, wir bezeichnen sie mit L.

Da der Winkel $\Delta \varphi_1$ für $\Delta t \to 0$ auch gegen Null geht, berühren sich beide Momentanpolkurven K und L in ihrem gemeinsamen Punkt P. Der Berührungspunkt der Momentanpolkurve ist das momentane Geschwindigkeitszentrum für die gegebene Zeit t.

Wir haben gesehen, daß bei einer angenommenen Bewegung der Figur S, die aus einer Reihe aufeinanderfolgender Drehungen besteht, das bewegliche Zentrumspolygon ohne zu gleiten auf dem unbeweglichen Zentrumspolygon abrollt. Hieraus schließen wir, *daß bei der tatsächlichen Bewegung der ebenen Figur die bewegliche Momentanpolkurve ohne zu gleiten auf der unbeweglichen Momentanpolkurve abrollt.*

Also kann jede ebene Bewegung als Rollen ohne Gleiten einer beweglichen, unveränderlich mit der ebenen Figur verbundenen Kurve auf einer unbeweglichen Kurve dargestellt werden.

Beispiel 51. Es sind die Momentanpolkurven für den Stab AB eines Ellipsographen (Abb. 231) zu konstruieren. Wir bezeichnen die Länge des Stabes AB mit $2a$. Wir konstruieren das momentane Geschwindigkeitszentrum P für den Stab AB als Schnittpunkt der in den Punkten A und B senkrecht zu den Geschwindigkeiten dieser Punkte errichteten Geraden.

Nun bezeichnen wir den Schnittpunkt der geraden Führungen, auf denen sich die Enden A und B des Stabes des Ellipsographen bewegen, mit O und bemerken, daß

$$OP = AB = 2a$$

ist.

Hieraus können wir schließen, daß der geometrische Ort der momentanen Geschwindigkeitszentren in der unbeweglichen Ebene der Kreisbogen ist, dessen Zentrum sich im Punkte O befindet und dessen Radius gleich $2a$ ist. Dieser Kreisbogen ist die unbewegliche Momentanpolkurve. Wir bezeichnen sie mit K.

Ferner bemerken wir, indem wir die Mitte des Abschnittes AB mit dem Buchstaben C bezeichnen, daß

$$CP = \frac{1}{2} OP = a$$

ist. Daraus folgt, daß der geometrische Ort der momentanen Geschwindigkeitszentren in der Ebene, die sich zusammen mit dem Stab AB bewegt, der Kreisbogen ist, dessen Zentrum sich im Punkte C befindet und dessen Radius gleich a ist. Dieser zweite Kreis L ist die bewegliche Momentanpolkurve.

Bei der Bewegung des Stabes AB rollt der Kreis L ohne zu gleiten auf dem Kreisumfang K. Wir können sagen, daß die Bewegung des Stabes des Ellipsographen identisch mit der Bewegung jenes Kreises ist, der ohne Gleiten innerhalb des unbeweglichen Kreises mit doppeltem Radius abrollt.

Wir haben gesehen, daß die Punkte A und B, die auf dem Kreise L liegen, Durchmesser des Kreises K beschreiben. Die Punkte A und B unterscheiden sich jedoch durch nichts von allen übrigen Punkten des Kreises L. Hieraus schließen wir, daß alle auf dem Kreis L liegenden Punkte Durchmesser des Kreises beschreiben. Diese Eigenschaft der Bewegung des Kreises L, der ohne zu gleiten innerhalb eines unbeweglichen Kreises K rollt, dessen Radius um das Zweifache größer ist, wurde von dem italienischen Mathematiker CARDANO beobachtet, nach dessen Namen die Kreise K und L *Cardanische Kreise* genannt werden.

§ 110. Die Addition der Rotationen einer ebenen Figur

Wir stellen uns zwei ebene Figuren S_1 und S_2 vor (Abb. 232), die irgendwelche Bewegungen in der Abbildungsebene ausführen. Die Figur S_1, die in der gegebenen Ebene ihre absolute Bewegung ausführt, vollführt außerdem irgendeine Relativbewegung in bezug auf die Figur S_2. Es ist klar, daß diese relative Bewegung eben ist. Die Bewegung der Figur S_2 ist eine Translativbewegung der Figur S_1. Wir können sagen, daß die absolute Bewegung der Figur S_1 eine aus der translativen Bewegung zusammen mit der Figur S_2 und der relativen Bewegung in bezug auf die Figur S_2 zusammengesetzte Bewegung darstellt.

In jeder der drei ebenen Bewegungen — der absoluten Bewegung der Figur S_1, der translativen Bewegung der Figur S_1 und der Relativbewegung der Figur S_1 in bezug auf die Figur S_2 — existieren im gegebenen Augenblick ein eigenes momentanes Geschwindigkeitszentrum und eine eigene Winkelgeschwindigkeit. Die momentanen Geschwindigkeitszentren, die den drei erwähnten Bewegungen entsprechen, werden wir die absoluten, translativen und relativen momentanen Geschwindigkeitszentren

nennen und mit P, P_e und P_r bezeichnen. Die Winkelgeschwindigkeiten derselben drei Bewegungen nennen wir die absolute, die translative und die relative Winkelgeschwindigkeit und bezeichnen ihre absoluten Größen mit ω, ω_e und ω_r.

Die Abhängigkeit zwischen den Lagen der drei momentanen Geschwindigkeitszentren P, P_e und P_r und zwischen den drei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω_e und ω_r soll nun ermittelt werden.

Wir wollen drei Fälle, die hier auftreten können, untersuchen.

Erster Fall. *Translative und relative Drehung verlaufen in einer Richtung.*

Wir nehmen an, daß die translative und die relative Drehung gegen den Uhrzeigersinn (um die entsprechenden momentanen Zentren P_e und P_r) verlaufen (Abb. 232). Wir wählen auf der Strecke $P_e P_r$ den Punkt P, der diese Strecke in Teile teilt, die umgekehrt proportional den Winkelgeschwindigkeiten ω_e und ω_r sind, d. h., es besteht die Bedingung

$$\frac{P_eP}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \qquad (1)$$

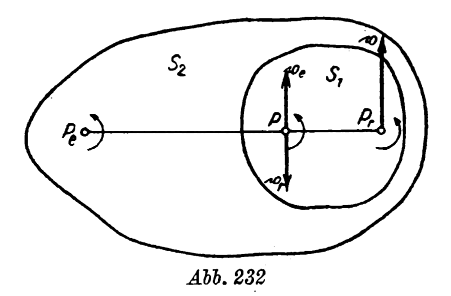


Abb. 232

Wir werden zeigen, daß der Punkt P das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum ist.

Um sich davon zu überzeugen, muß man zeigen, daß die absolute Geschwindigkeit des Punktes P gleich Null ist. Auf Grund des Additionstheorems der Geschwindigkeiten ist die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes der Figur S_1 gleich der Summe ihrer translativen und relativen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$. Wir wollen dieses Theorem auf den Punkt P anwenden:

$$v_e = P_eP \cdot \omega_e, \qquad v_r = PP_r \cdot \omega_r.$$

Aus der Bedingung (1) folgt jedoch

$$P_eP \cdot \omega_e = PP_r \cdot \omega_r \qquad (2)$$

und daraus

$$v_e = v_r.$$

Die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ verlaufen, wie aus der Abbildung ersichtlich ist, entgegengesetzt zueinander. Die Summe der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$, die der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, ist gleich Null. Folglich ist die absolute Geschwindigkeit des Punktes P gleich Null, d. h., der Punkt P ist das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum.

Das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum P liegt also auf der Strecke, die das translative und relative momentane Zentrum P_e und P_r verbindet, und teilt diese Strecke umgekehrt proportional den Winkelgeschwindigkeiten ω_e und ω_r.

Wir wollen nun das Additionstheorem der Geschwindigkeiten auf den Punkt P_r anwenden. Da die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ dieses Punktes gleich Null ist, muß gemäß dem erwähnten Theorem ihre absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleich ihrer translativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ sein. Für den Punkt P_r gilt:

$$v = PP_r \cdot \omega\,, \qquad v_e = P_eP_r \cdot \omega_e\,.$$

Setzen wir die Größen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_e$ gleich, so erhalten wir

$$PP_r \cdot \omega = P_eP_r \cdot \omega_e\,,$$

woraus

$$\omega = \frac{P_eP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{(P_eP + PP_r)\cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{P_eP \cdot \omega_e + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r}$$

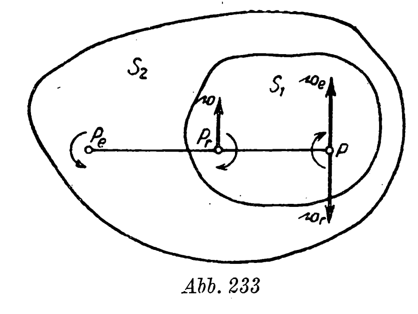


Abb. 233

folgt, oder auf Grund der Gleichung (2)

$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \omega_r + \omega_e\,,$$

d. h., *die absolute Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Summe der relativen und der translativen Winkelgeschwindigkeit.*

Für die Richtung der absoluten Rotation kann man aus der Richtung der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes P_r (die mit seiner translativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ zusammenfällt) schließen, daß diese (um das absolute momentane Zentrum P) gegen den Uhrzeigersinn verläuft.

Die Richtung der zusammengesetzten Rotation fällt also mit den Richtungen der Rotationskomponenten zusammen.

Zweiter Fall. *Die translative und die relative Rotation seien nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, ihre Winkelgeschwindigkeiten seien der Größe nach ungleich.*

Nehmen wir an, daß die relative Rotation im Uhrzeigersinn verläuft, die translative gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 233), und schlagen vor, daß $\omega_r > \omega_e$.

Wir wählen den Punkt P auf der Verlängerung des Abschnittes P_eP_r auf der Seite des momentanen Zentrums P_r, der die Bedingung

$$\frac{P_eP}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \tag{3}$$

erfüllt, und werden zeigen, daß dieser Punkt P das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum ist.

Wir wenden das Additionstheorem der Geschwindigkeiten auf den Punkt P an:

$$v_e = P_eP \cdot \omega_e\,, \qquad v_r = PP_r \cdot \omega_r\,.$$

Auf Grund der Bedingung (3) erhalten wir

$$P_e P \cdot \omega_e = PP_r \cdot \omega_r \tag{4}$$

und daraus

$$v_e = v_r .$$

Da die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ entgegengesetzt sind, ist ihre Summe gleich Null. Folglich ist die absolute Geschwindigkeit des Punktes P gleich Null, d. h., der Punkt P ist das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum.

Das absolute momentane Geschwindigkeitszentrum P liegt auf der Verlängerung des Abschnittes, der die translativen und relativen momentanen Zentren P_e und P_r verbindet, und zwar jenseits des Zentrums, dem die größere Winkelgeschwindigkeit entspricht. Die Abstände $P_e P$ und $P_r P$ sind umgekehrt proportional den Winkelgeschwindigkeiten ω_e und ω_r.

Nun wenden wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten im Punkte P_r an. Für diesen Punkt gilt:

$$v = P P_r \cdot \omega , \qquad v_e = P_e P_r \cdot \omega_e , \qquad v_r = 0 .$$

Da $\mathfrak{v}_r = 0$ ist, muß gemäß dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e$$

sein.

Setzen wir die Größen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_e$ gleich, so erhalten wir:

$$PP_r \cdot \omega = P_e P_r \cdot \omega_e ,$$

daraus

$$\omega = \frac{P_e P_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{P_e P - PP_r}{PP_r} \cdot \omega_e = \frac{P_e P \cdot \omega_e - PP_r \cdot \omega_e}{PP_r}$$

oder auf Grund der Gleichung (4)

$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r - PP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \omega_r - \omega_e ,$$

d. h., *die absolute Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungskomponenten.*

Die Richtung der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes P_r zeigt, daß die absolute Rotation (um das absolute momentane Zentrum P) im Uhrzeigersinn verläuft.

Hieraus schließen wir, daß *die Richtung der zusammengesetzten Rotation mit der Richtung der Rotationskomponente zusammenfällt, der die größere Winkelgeschwindigkeit entspricht.*

Dritter Fall. *Translative und relative Rotation verlaufen nach entgegengesetzten Seiten, ihre Winkelgeschwindigkeiten sind der Größe nach gleich.*

Wir nehmen an, daß die relative Rotation im Uhrzeigersinn verläuft, die translative aber entgegen dem Uhrzeigersinn (Abb. 234), wobei

$$\omega_e = \omega_r$$

ist.

Wir werden zeigen, daß in diesem Fall die absoluten Geschwindigkeiten aller Punkte der Figur S_1 gleich sind.

Betrachten wir einen beliebigen Punkt M der Figur S_1 und ermitteln seine absolute Geschwindigkeit nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

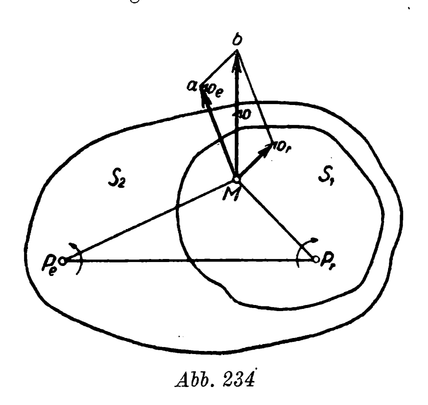


Abb. 234

Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M wird durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, das aus der translativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ und der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ konstruiert ist. Die Größen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ sind

$$v_e = P_e M \cdot \omega_e ,$$

$$v_r = P_r M \cdot \omega_r = P_r M \cdot \omega_e .$$

Die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ stehen senkrecht auf den Abschnitten P_eM bzw. P_rM.

Wir bemerken, daß die Dreiecke Mab und $P_eM P_r$ ähnlich sind, da die Seiten Ma und ab proportional den Seiten P_eM und P_rM sind und $\sphericalangle\, Mab = \sphericalangle\, P_eM\,P_r$ ist (die Seiten des einen Winkels stehen senkrecht auf den Seiten des anderen). Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgern wir

$$\frac{v}{P_e P_r} = \frac{v_r}{P_e M} = \omega_e ,$$

oder

$$v = P_e P_r \cdot \omega_e .$$

Ferner müssen die dritten Seiten Mb und $P_e P_r$ zueinander senkrecht sein, da die zwei Seiten Ma und ab des einen Dreiecks senkrecht auf den zwei Seiten P_eM und P_rM des anderen Dreiecks stehen. Folglich ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ senkrecht zum Abschnitt P_eP_r gerichtet.

Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes M der ebenen Figur S_1, verläuft also senkrecht zum Abschnitt $P_e\, P_r$ und ist der Größe nach $v = P_e\, P_r \cdot \omega_e$. Somit sind die absoluten Geschwindigkeiten aller Punkte der Figur S_1 gleich.

Hieraus schließen wir, daß die zusammengesetzte Bewegung eine fortschreitende ist, wenn die Richtungen der Rotationskomponenten *nicht nur im gegebenen Augenblick*, sondern während der *ganzen Zeit der Bewegung* einander entgegengesetzt, ihre Winkelgeschwindigkeiten aber gleich sind. Also kann man sich die ebene fortschreitende Bewegung aus zwei entgegengesetzt gerichteten Rotationskomponenten

gleicher Winkelgeschwindigkeiten zusammengesetzt denken. Die Vereinigung von zwei entgegengesetzt gerichteten Rotationen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten heißt *Drehpaar.*

Beispiel 52. Das Beispiel 46 soll mit Hilfe der Addition der Rotationen gelöst werden.

Wir betrachten die absolute Bewegung des Zahnrades L (Abb. 235) als aus der translativen Bewegung zusammen mit dem Stabe OA und der relativen Bewegung in bezug auf diesen Stab zusammengesetzte Bewegung.

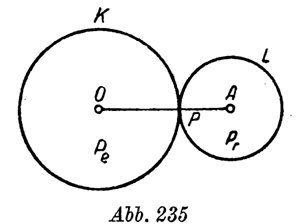


Abb. 235

Das translative momentane Zentrum P_e fällt mit dem Punkte O, das relative momentane Zentrum P_r mit dem Zentrum A des Zahnrades L zusammen. Das absolute momentane Zentrum P befindet sich im Berührungspunkt der Teilkreise der Zahnräder K und L. Die translative Winkelgeschwindigkeit ω_e ist gleich der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Stabes OA. Die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ω_2 ist die absolute Winkelgeschwindigkeit des Zahnrades L.

Da sich das absolute momentane Zentrum P zwischen den momentanen Zentren P_e und P_r befindet, verlaufen alle drei Rotationen (die absolute, translative und relative) nach einer Seite. In diesem Fall gilt

$$\omega_2 = \omega_e + \omega_r .$$

Andererseits ist

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{a}{b},$$

woraus wir finden, wenn wir $\omega_e = \omega_1$ annehmen:

$$\omega_r = \frac{a}{b}\,\omega_1 .$$

Folglich ist

$$\omega_2 = \omega_e + \omega_r = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\omega_1 .$$

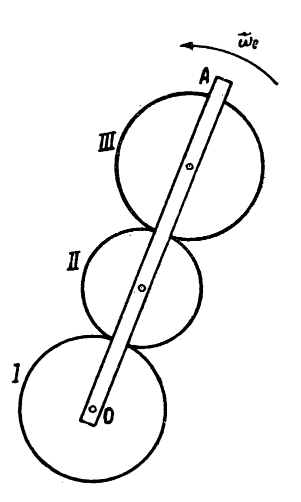


Abb. 236

Beispiel 53. Auf die feste Achse O sind das Zahnrad I und der Hebel OA gesetzt (Abb. 236). Das Zahnrad I ist unbeweglich befestigt, der Hebel OA rotiert um die feste Achse O und trägt die Achsen der beweglichen Zahnräder II und III. Die Radien der Zahnräder sind $r_1 = 20$ cm bzw. $r_2 = 15$ cm, $r_3 = 20$ cm. Der Hebel OA rotiert um die Achse O gegen den Uhrzeigersinn und vollführt 60 Umdrehungen in der Minute. Die Winkelgeschwindigkeit des Zahnrades III soll ermittelt werden.

Wir betrachten die absolute Bewegung des Zahnrades III als eine aus der drehenden Bewegung zusammen mit dem Hebel OA und der relativen Bewegung in bezug auf diesen Hebel zusammengesetzte.

In einem solchen Falle verläuft die Rotation des Zahnrades III mit dem Hebel OA gegen den Uhrzeigersinn. Die entsprechende Drehzahl beträgt

$$\omega_e = 60 \text{ U/min}.$$

Um die relative Winkelgeschwindigkeit des Zahnrades *III* zu finden, wollen wir auf unseren Mechanismus vom Standpunkt eines Beobachters blicken, der an der Rotation des Hebels *OA* teilnimmt. Diesem Beobachter erscheint der Hebel *OA* unbeweglich, das Zahnrad *I* aber stellt sich ihm so dar, als rotiere es im Uhrzeigersinn mit der Drehzahl $\omega_e = 60$ U/min (Abb. 237).

Die Zahnräder *II* und *III* werden unserem Beobachter gleichfalls als um die festen Achsen rotierend erscheinen, das Zahnrad *II* rotiert gegen den Uhrzeigersinn, das Zahnrad *III* im Uhrzeigersinn. Diese Bewegungen der Zahnräder *I*, *II* und *III*, die von einem zusammen mit dem Hebel *OA* sich drehenden Beobachter betrachtet werden, sind Relativbewegungen in bezug auf diesen Hebel.

Nun ist es leicht, die relative Winkelgeschwindigkeit ω_r des Zahnrades *III* zu ermitteln. Wenn wir beachten, daß die Zahnräder *I*, *II*, *III* bei der Rotation um die festen Achsen in den Berührungspunkten gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben müssen, und wenn wir die Größe dieser gemeinsamen Umfangsgeschwindigkeit mit v bezeichnen, erhalten wir

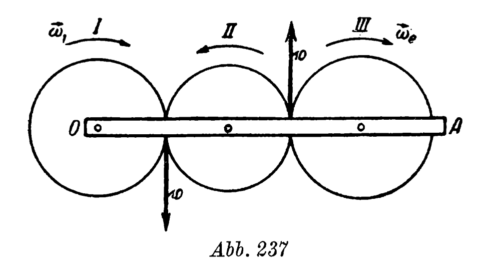


Abb. 237

$$v = r_1\,\omega_e = r_3\,\omega_r\,,$$

woraus

$$\omega_r = \frac{r_1}{r_3}\,\omega_e = 60 \text{ U/min}$$

folgt.

Folglich rotiert das Zahnrad *III* in seiner Relativbewegung in bezug auf den Hebel *OA* im Uhrzeigersinn mit einer Drehzahl von 60 Umdrehungen in der Minute.

Da die Rotation mit dem Hebel *OA* und die relative Rotation des Zahnrades *III* bezüglich des Hebels entgegengesetzt gerichtet sind, finden wir die absolute Winkelgeschwindigkeit dieses Zahnrades als Differenz der beiden Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega = \omega_e - \omega_r = 60 \text{ U/min} - 60 \text{ U/min} = 0\,.$$

Somit rotiert das Zahnrad *III* bei seiner absoluten Bewegung nicht, es bewegt sich fortschreitend.

In diesem Beispiel hatten wir es also mit einem Drehpaar zu tun.

§ 111. Die Anwendung der Addition von Rotationen zur Ermittlung der momentanen Geschwindigkeitszentren für die Glieder eines ebenen Mechanismus

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die drei momentanen Geschwindigkeitszentren P, P_e und P_r auf einer Geraden liegen. In dem Ausnahmefall aber, in dem sich das momentane Zentrum P im Unendlichen befindet, verläuft die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ senkrecht zu der durch die momentanen Zentren P_e und P_r gehenden Geraden.

Diese Voraussetzung kann mit Erfolg zur Ermittlung der momentanen Geschwindigkeitszentren der Glieder eines ebenen Mechanismus verwendet werden.

Stellen wir uns einen ebenen Mechanismus vor, der aus n Gliedern besteht, die als ebene Figuren $S_1, S_2, \ldots, S_n$ angesehen werden. Wir verabreden, das momentane

Geschwindigkeitszentrum der Relativbewegung irgendeines Gliedes S_a in bezug auf das Glied S_b mit P_{ab} zu bezeichnen, und bemerken, daß das momentane Geschwindigkeitszentrum der Relativbewegung des Gliedes S_b in bezug auf das Glied S_a mit dem momentanen Geschwindigkeitszentrum der Relativbewegung des Gliedes S_a in bezug auf das Glied S_b zusammenfällt, d. h., daß der Punkt P_{ba} mit dem Punkt P_{ab} zusammenfällt.

Wir betrachten nun drei beliebige Glieder S_a, S_b, S_c. Die Relativbewegung des Gliedes S_a in bezug auf das Glied S_c kann man als aus der Relativbewegung des Gliedes S_a in bezug auf das Glied S_b und der Relativbewegung S_b in bezug auf das Glied S_c zusammengesetzt betrachten. Wenn wir im gegebenen Fall den am Anfang dieses Paragraphen formulierten Satz anwenden, kommen wir zu folgendem Resultat:

Die momentanen Zentren P_{ab}, P_{ac} und P_{bc} liegen auf einer Geraden.

Befindet sich jedoch eines der momentanen Zentren, z. B. P_{ac}, im Unendlichen, so ist die Geschwindigkeit der Relativbewegung des Gliedes S_a in bezug auf das Glied S_c senkrecht zu der Geraden gerichtet, die durch die beiden anderen momentanen Zentren P_{ab} und P_{bc} hindurchgeht.

Bei der Anwendung dieses Theorems (das Theorem der drei momentanen Geschwindigkeitszentren genannt wird) zur Ermittlung der momentanen Geschwindigkeitszentren für die Glieder eines ebenen Mechanismus muß man das Gestell des Mechanismus als das $n+1$-te Glied S_{n+1} ansehen. Die absolute Bewegung des Gliedes S_a muß jedoch als Relativbewegung in bezug auf das Glied S_{n+1} angenommen werden. In diesem Fall muß das momentane Geschwindigkeitszentrum der absoluten Bewegung des Gliedes S_a mit $P_{a,\,n+1}$ bezeichnet werden.

Beispiel 54. Ein Mechanismus besteht aus den Gliedern S_1 und S_2, die durch die Stäbe S_3 und S_4 verbunden sind. Das Glied S_1 rotiert um die feste Achse O_1, an das Glied S_2 ist jedoch der Stab S_5 gefügt, der um die feste Achse O_2 rotiert (Abb. 238). Das momentane Geschwindigkeitszentrum für das Glied S_2 soll ermittelt werden.

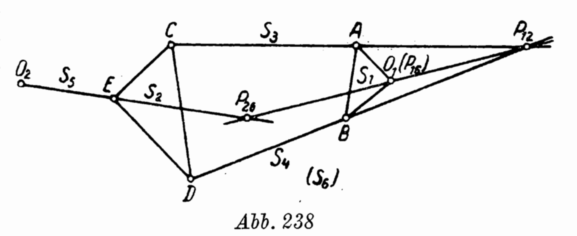


Abb. 238

Wir bezeichnen das Gestell des Mechanismus mit S_6. Das momentane Zentrum P_{26} soll konstruiert werden.

Uns ist die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes E bekannt, sie verläuft senkrecht zu der Geraden EO_2. Da das momentane Zentrum P_{26} auf der Senkrechten liegen muß, die im Punkte E zu der Richtung seiner Geschwindigkeit errichtet ist, liegt es folglich auf der Geraden EO_2. Um die andere Gerade zu konstruieren, auf der sich das momentane Zentrum P_{26} befinden muß, benutzen wir das Theorem der drei momentanen Zentren.

Wir wählen die Glieder S_1, S_2 und S_6. Das momentane Zentrum P_{16} fällt mit dem unbeweglichen Punkt O_1 zusammen. Wenn wir das momentane Zentrum P_{12} konstruieren wollen, bemerken wir, daß uns bei der Relativbewegung des Gliedes S_2 in bezug auf das Glied S_1 die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte C und D bekannt sind. Sie verlaufen senkrecht zu den Geraden AC und BD. Folglich liegt das momentane Zentrum P_{12} im Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Wir ziehen nun eine Gerade durch die

Punkte P_{16} und P_{12}. Nach dem Theorem der drei momentanen Zentren muß auf dieser Geraden auch das momentane Zentrum P_{26} liegen.

Also befindet sich das gesuchte momentane Zentrum P_{26} im Schnittpunkt der Geraden EO_2 und O_1P_{12}.

Beispiel 55. Es ist das momentane Geschwindigkeitszentrum für das Glied CD des *Inversors von* LIPKIN (Abb. 239) zu konstruieren.

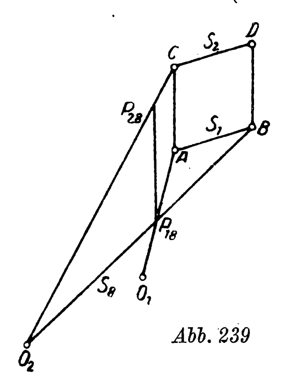


Abb. 239

Der Inversor von LIPKIN besteht aus sieben Stäben. Wir bezeichnen den Stab AB mit S_1, den Stab CD mit S_2, das Gestell des Mechanismus mit S_8. Das momentane Zentrum P_{28} ist zu konstruieren.

Uns ist die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes C bekannt, sie verläuft senkrecht zu CO_2. Folglich liegt das momentane Zentrum P_{28} auf der Geraden CO_2. Um die andere Gerade zu konstruieren, auf der das momentane Zentrum P_{28} liegen muß, benutzen wir das Theorem der drei momentanen Zentren.

Wir betrachten die Glieder S_1, S_2 und S_8. Das momentane Zentrum P_{18} befindet sich im Schnittpunkt der Senkrechten, die in den Punkten A und B auf ihren Geschwindigkeiten errichtet sind, d. h. im Schnittpunkt der Geraden AO_1 und BO_2. Die Relativbewegung des Gliedes S_2 in bezug auf das Glied S_1 ist eine fortschreitende Bewegung (da in jeder Lage des Mechanismus die Stäbe CD und AB parallel verlaufen). Folglich befindet sich das momentane Zentrum P_{12} im Unendlichen.

Die Geschwindigkeit des Gliedes S_2 bei seiner Relativbewegung in bezug auf das Glied S_1 verläuft senkrecht zu der Geraden AC. Die Gerade, die durch die Punkte P_{18} und P_{28} hindurchgeht, muß senkrecht zu dieser Geschwindigkeit sein, d. h. parallel zu der Geraden AC.

Somit finden wir, wenn wir durch den Punkt P_{18} eine zu AC parallele Gerade ziehen, das gesuchte momentane Zentrum P_{28} im Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden CO_2.

KAPITEL XVIII

DIE ROTATION EINES STARREN KÖRPERS UM EINEN FESTEN PUNKT

§ 112. Die EULERschen Winkel. Die Rotationsgleichungen eines starren Körpers um einen festen Punkt

Die Bewegung eines starren Körpers heißt *Rotation um einen festen Punkt*, wenn ein Punkt des starren Körpers während der gesamten Zeit der Bewegung unbeweglich bleibt. Wir stellen uns einen um den festen Punkt O rotierenden starren Körper vor (Abb. 240). Um analytisch die drehende Bewegung des starren Körpers um den Punkt O zu bestimmen, wählen wir die drei zueinander senkrechten festen Achsen x, y und z mit dem Ursprung im Punkte O und die drei zueinander senkrechten und unveränderlich mit dem starren Körper verbundenen Achsen ξ, η und ζ mit dem Ursprung in demselben Punkte O.

Wir betrachten den Schnitt der Ebenen xOy und $\xi O\eta$. Der Schnitt sei die Gerade OJ. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\sphericalangle (z, \zeta) = \vartheta; \qquad \sphericalangle (x, J) = \psi; \qquad \sphericalangle (J, \xi) = \varphi,$$

wobei wir verabreden, die Winkel ϑ, ψ und φ als positiv anzusehen, wenn für die Beobachter, die von der Seite der positiven Achsen J, z und ζ blicken, diese Winkel als von den Achsen z, x und J im Gegenzeigersinn abgetragen erscheinen.

Durch das Vorgeben der Winkel ϑ, ψ und φ wird die Lage der Achsen ξ, η und ζ voll und ganz bestimmt und folglich auch die Lage des starren Körpers, mit dem diese Achsen unveränderlich verbunden sind. Die Winkel ϑ, ψ und φ heißen EULERsche Winkel.

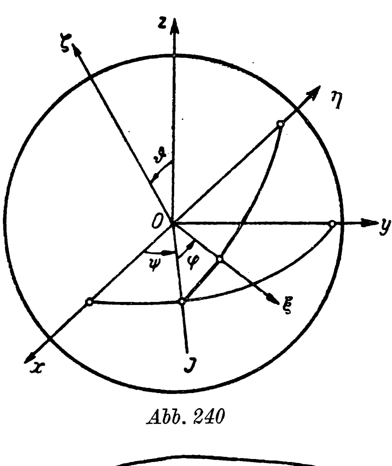


Abb. 240

Führt der starre Körper eine drehende Bewegung um den festen Punkt O aus, so verändern sich die Winkel ϑ, ψ und φ ununterbrochen im Laufe der Zeit, d. h., sie erscheinen als Zeitfunktionen

$$\vartheta = f_1(t); \qquad \psi = f_2(t); \qquad \varphi = f_3(t).$$

Diese Gleichungen, durch welche die drehende Bewegung des starren Körpers um den festen Punkt O eindeutig bestimmt ist, heißen *Rotationsgleichungen des starren Körpers um einen festen Punkt.*

§ 113. Die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Die momentane Achse und die Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der um einen festen Punkt rotiert. Wir werden zeigen, *daß ein starrer Körper aus jeder gegebenen Lage in jede andere Lage durch Drehung um irgendeine Achse verrückt werden kann, die durch den festen Punkt hindurchgeht.*

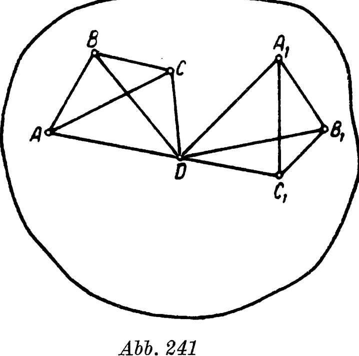


Abb. 241

Wir bemerken einleitend, daß die Lage eines um den festen Punkt O rotierenden Körpers (Abb. 241) eindeutig bestimmt wird durch die Lage seiner zwei Punkte A und B, die nicht auf einer Geraden mit dem festen Punkt O liegen. Wenn die Punkte A und B in einem bestimmten Augenblick die Lagen A_1 und B_1 einnehmen, finden wir die Lage eines beliebigen dritten Punktes C im betrachteten Augenblick, indem wir auf dem Dreieck OA_1B_1 (als Basis genommen) das Tetraeder $OA_1B_1C_1$ konstruieren, das gleich dem Tetraeder $OABC$ ist.

Wir gehen nun zur Beweisführung des oben formulierten Theorems über.

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der um den festen Punkt O rotiert (Abb. 242). Die Umrisse des Körpers sind in der Abbildung nicht dargestellt. Wir beschreiben innerhalb dieses Körpers um den festen Punkt O (als Mittelpunkt) die Oberfläche einer Kugel von beliebigem Radius. Auf dieser kugelförmigen Fläche nehmen wir zwei beliebige Punkte A und B an und ziehen durch diese Punkte den Bogen des Großkreises AB. Durch die Lage der Punkte A und B oder, was dasselbe ist, durch die Lage des Bogens AB wird die Lage unseres starren Körpers eindeutig bestimmt.

Wir wählen die Zeiten t und $t + \Delta t$ und nehmen an, daß der Bogen AB zur Zeit t die in der Abbildung gezeigte Lage einnimmt, im Moment $t + \Delta t$ aber die Lage A_1B_1. Wir werden zeigen, daß unser Bogen aus der ersten Lage in die zweite durch eine Drehung um eine bestimmte Achse, die durch den festen Punkt O hindurchgeht, verrückt werden kann.

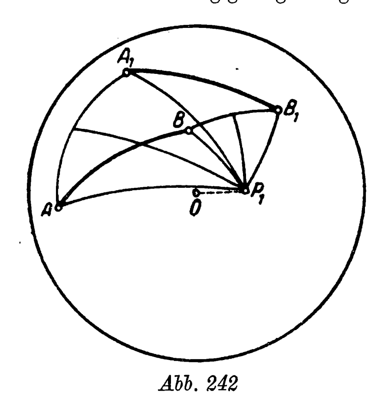


Abb. 242

Wir ziehen die Bogen der Großkreise AA_1 und BB_1. Durch die Punkte, die diese Bogen in der Mitte teilen, führen wir die Bogen der Großkreise, die senkrecht auf den Bogen AA_1 und BB_1 stehen. Wir vermerken den Schnittpunkt P_1 der soeben gezogenen zwei Bogen und verbinden den Punkt P_1 mit dem festen Punkt O durch eine gerade Linie. Die Gerade OP_1 ist die Achse, um die der Bogen AB gedreht werden muß, um in die Lage A_1B_1 verrückt zu werden.

Wir wollen noch die Bogen der Großkreise AP_1, BP_1, A_1P_1 und B_1P_1 ziehen. Die sphärischen Dreiecke ABP_1 und $A_1B_1P_1$ sind gleich (da drei Seiten gleich sind). Folglich ist

$$\sphericalangle\, AP_1B = \sphericalangle\, A_1P_1B_1 .$$ [1]

Wenn wir von beiden Teilen dieser Gleichung je einen Winkel $\sphericalangle\, A_1P_1B$ abziehen, erhalten wir $\sphericalangle\, AP_1A_1 = \sphericalangle BP_1B_1$. Wir bezeichnen jeden der gleichen Winkel $\sphericalangle\, AP_1A_1$ und $\sphericalangle\, BP_1B_1$ mit $\Delta\alpha$. Drehen wir den Bogen AB um die Achse OP_1 um den Winkel $\Delta\alpha$, so wird der Punkt A die Lage A_1, der Punkt B die Lage B_1 einnehmen, und folglich wird der Bogen AB in die Lage A_1B_1 verrückt werden.

Also kann man den Bogen AB (und zusammen mit ihm auch den ganzen starren Körper) aus der ersten Lage in die zweite durch eine Drehung um die Achse OP_1 um den Winkel $\Delta\alpha$ verrücken.

Wir gehen nun zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Bei Annäherung von Δt an 0 nähert sich die zweite Lage des Bogens AB der ersten Lage und somit die zweite Lage des starren Körpers seiner ersten Lage. Gleichzeitig *nähert sich die Drehachse* OP_1 *einer*

[1] Unter dem Winkel $\sphericalangle\, AP_1B$ verstehen wir den Winkel zwischen den an den Bogen P_1A und P_1B im Punkte P_1 gezogenen Tangenten.

Grenzlage OP, die momentane Drehachse zur gegebenen Zeit t genannt wird. Der Grenzwert aber, dem sich das Verhältnis $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ nähert, wenn Δt gegen Null geht, wird *Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers zur Zeit t* genannt. Wir bezeichnen die Winkelgeschwindigkeit mit dem Buchstaben ω. Folglich ist

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\right].$$

Natürlich ist dieser Grenzwert nicht gleich der Ableitung $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ (da kein Winkel α vorhanden ist). Im weiteren wird gezeigt werden, wie die Winkelgeschwindigkeit ω errechnet werden kann, wenn die Rotationsgleichungen des starren Körpers gegeben sind.

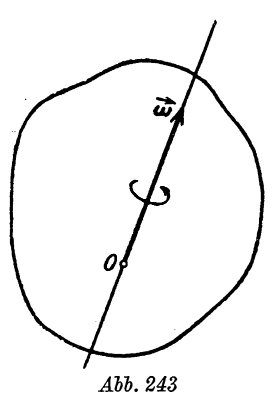


Abb. 243

Die analytische Untersuchung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt wird außerordentlich vereinfacht, wenn man vereinbart, die Winkelgeschwindigkeit des Körpers als Vektorgröße zu betrachten. Im Weiteren werden wir die Winkelgeschwindigkeit als Vektor betrachten (wir werden ihn mit $\vec{\omega}$ bezeichnen), indem wir der Winkelgeschwindigkeit die Richtung der momentanen Achse zuschreiben. Hierbei vereinbaren wir, die Größe der Winkelgeschwindigkeit auf der momentanen Achse vom festen Punkt O nach der Seite abzutragen, daß ein Beobachter, der sich auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit (mit den Füßen im Punkte O) befindet, den Eindruck hat, die Drehung des starren Körpers um die momentane Achse erfolge gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 243).

§ 114. Die Winkelbeschleunigung

Die Größe der Winkelgeschwindigkeit ω ändert sich im allgemeinen im Laufe der Zeit. Es verändert sich im Laufe der Zeit auch die Richtung der momentanen Achse und folglich auch die Richtung der Winkelgeschwindigkeit.

Wir betrachten zwei Zeiten t und $t + \Delta t$. Nehmen wir an, daß der Zeit t die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entspricht und der Zeit $t + \Delta t$ die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ (Abb. 244). Wir konstruieren die Differenz der Vektoren $\vec{\omega}_1$ und $\vec{\omega}$, d. h. den Vektorenzuwachs $\Delta \vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit in der Zeit Δt.

Der Grenzwert des Verhältnisses des Zuwachses der Winkelgeschwindigkeit $\Delta \vec{\omega}$ zum entsprechenden Zeitraum Δt für $\Delta t \to 0$ heißt *Winkelbeschleunigung* zur Zeit t. Wir bezeichnen die Winkelbeschleunigung mit $\vec{\varepsilon}$ und erhalten

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}\right].$$

Natürlich ist die Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ als Grenzwert der Vektorgröße selbst ein Vektor. Den Vektor $\vec{\varepsilon}$ werden wir vom festen Punkt O abtragen.

Der Grenzwert des Verhältnisses des Zuwachses des veränderlichen Vektors zum entsprechenden Zuwachs der unabhängigen Variablen ist die Ableitung dieses Vektors. Folglich ist

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Die Winkelbeschleunigung ist gleich der Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit.

Wenn Größe und Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ für einen beliebigen Zeitpunkt bekannt sind, kann die Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ durch das folgende einfache Verfahren ermittelt werden.

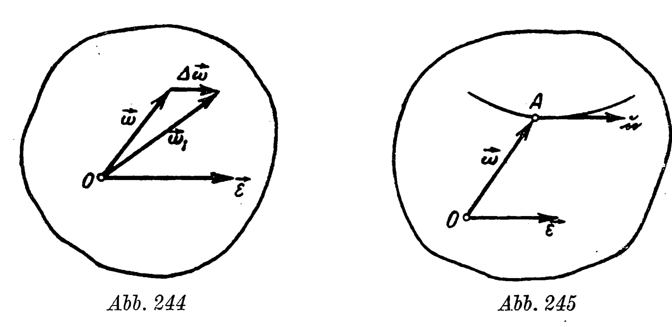


Abb. 244 *Abb. 245*

Wir bezeichnen das Ende des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit dem Buchstaben A (Abb. 245). Da der Vektor $\vec{\omega}$ im Laufe der Zeit seine Größe und seine Richtung verändert, wird der Punkt A im Laufe der Zeit im Raume verrückt, wobei er eine Kurve beschreibt, die *Hodograph der Winkelgeschwindigkeit* heißt.

Wir wollen die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, mit der der Punkt A sich nach dem Hodographen bewegt, ermitteln.

Wir wissen, daß die Geschwindigkeit des Punktes gleich der Ableitung des Radius-Vektors dieses Punktes nach der Zeit ist. Der Vektor $\vec{\omega}$ ist der Radius-Vektor des Punktes A. Folglich ist

$$\mathfrak{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Wir folgern, daß

$$\vec{\varepsilon} = \mathfrak{u}$$

ist, d. h., *die Winkelbeschleunigung ist gleich der linearen Geschwindigkeit des Vektorendes der Winkelgeschwindigkeit.* Wenn wir bei der Berechnung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ die uns bekannten Verfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines Punktes anwenden, erhalten wir eine Möglichkeit, die Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ zu berechnen.

§ 115. Die Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers, der um einen festen Punkt rotiert

Wir betrachten irgendeinen Punkt M eines starren Körpers, der um den festen Punkt O rotiert (Abb. 246). Wir vermerken die Lagen, die der Punkt M zur Zeit t (Lage M) und zur Zeit $t + \Delta t$ (Lage M_1) einnimmt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M zur Zeit t bestimmen wir als Grenzgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ der angenommenen gleichförmigen Bewegung längs der Sehne MM_1.

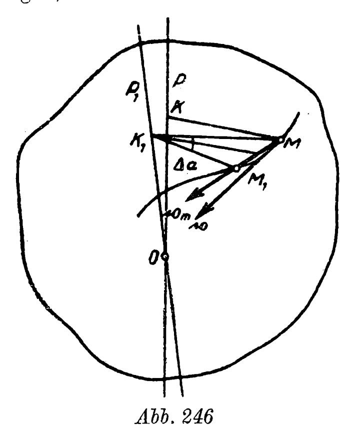


Abb. 246

Es ist

$$v_m = \frac{M M_1}{\Delta t}.$$

Wir wissen, daß unser starrer Körper durch eine Drehung um die Achse OP_1 um einen Winkel $\Delta\alpha$ aus der ersten Lage in die zweite verrückt werden kann. Wenn wir von den Punkten M und M_1 die Lote MK_1 und M_1K_1 auf die Drehachse OP_1 fällen, erhalten wir das gleichschenklige Dreieck MK_1M_1, in dem der Winkel an der Spitze K_1 gleich $\Delta\alpha$ ist. Aus diesem Dreieck erhalten wir

$$M M_1 = 2\, M K_1 \sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

und folglich

$$v_m = 2\, M K_1 \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

Gehen wir zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über, so erhalten wir

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} [v_m] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[2\, M K_1 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[M K_1 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right].$$

Es ist aber

$$\lim_{\Delta t \to 0} [M K_1] = M K, \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\right] = 1,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right] = \omega,$$

wobei MK das vom Punkte M auf die momentane Achse OP gefällte Lot ist.

Wenn wir MK mit r bezeichnen, finden wir:

$$v = r\,\omega.$$

Andererseits ist die angenommene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ senkrecht zu der Drehachse OP_1 gerichtet (da die Ebene des Dreiecks MK_1M_1 senkrecht zur Achse OP_1 verläuft) und bildet den Winkel $90° - \frac{\Delta\alpha}{2}$ mit dem Abschnitt MK_1. Gehen wir zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über, so können wir folgern, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ senkrecht auf der momentanen Achse OP und auf dem Lot MK steht, das von dem Punkte M auf die momentane Achse gefällt ist. Mit anderen Worten, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verläuft senkrecht zu der Ebene, die durch den Punkt M und die momentane Achse OP geht.

Die für Größe und Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gewonnenen Resultate kann man kurz formulieren, indem man sagt, *daß die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes eines starren Körpers die Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Drehachse ist.*

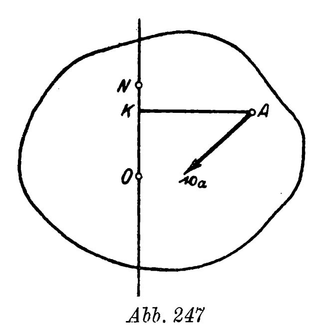


Abb. 247

Für die auf der momentanen Achse liegenden Punkte ist $r = 0$, und folglich ist auch $v = 0$. Also kann man die momentane Drehachse als geometrischen Ort der Punkte des starren Körpers bestimmen, deren Geschwindigkeiten im gegebenen Augenblick gleich Null sind.

Um die dem gegebenen Augenblick entsprechende momentane Achse zu konstruieren, genügt es, einen Punkt N des starren Körpers zu ermitteln, dessen Geschwindigkeit in diesem Augenblick gleich Null ist. Die Gerade, die durch den Punkt M und den festen Punkt O verläuft, ist die momentane Achse OP (Abb. 247).

Ist die momentane Achse schon ermittelt, so genügt es, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ eines beliebigen Punktes A (der nicht auf der momentanen Achse liegt) zu kennen, um die Winkelgeschwindigkeit ω zu finden. Fällen wir das Lot AK von dem Punkte A auf die momentane Achse, so erhalten wir

$$v_a = AK \cdot \omega,$$

und daraus

$$\omega = \frac{v_a}{AK},$$

d. h., um die Größe der Winkelgeschwindigkeit ω zu ermitteln, muß man die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ durch den Abstand des Punktes A von der momentanen Drehachse dividieren.

Beispiel 56. Eine runde Scheibe rollt, ohne zu gleiten, auf einer waagerechten Ebene, wobei die waagerechte Achse OA um die feste vertikale Achse OB mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 rotiert (Abb. 248); $OA = a$, $OB = b$. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und die Geschwindigkeit des höchsten Punktes der Scheibe M sind zu ermitteln.

Die Bewegung der Scheibe kann man als Rotation um den festen Punkt O ansehen. Vor allem wollen wir die momentane Achse dieser Rotation ermitteln.

Die momentane Achse muß durch den festen Punkt O und jenen Punkt der Scheibe verlaufen, dessen Geschwindigkeit im gegebenen Augenblick gleich Null ist. Da nach Voraussetzung die Scheibe ohne zu gleiten rollt, erscheint als solcher der Berührungspunkt der Scheibe mit der waagerechten Ebene, auf der die Scheibe rollt. Wenn wir diesen Punkt mit C bezeichnen und ihn durch eine gerade Linie mit dem festen Punkt O verbinden, erhalten wir die momentane Achse OC.

Um die Größe ω der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe zu ermitteln, wenden wir uns der Größe $\mathfrak{v}_a$ der Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes A zu.

Da der Punkt A zum Stabe OA gehört, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die feste Achse OB dreht, muß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ die Drehgeschwindigkeit um die Achse OB sein, d. h.

$$\mathfrak{v}_a = OA \cdot \omega_1 = a\,\omega_1 .$$

Der Punkt A gehört aber gleichfalls zu unserer Scheibe, und folglich muß seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ gleichzeitig die Drehgeschwindigkeit um die momentane Achse OC sein.

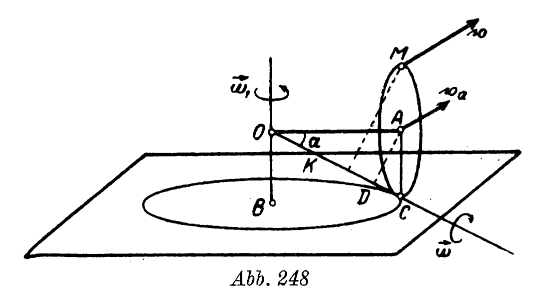


Abb. 248

Fällen wir vom Punkte A aus das Lot AB auf die momentane Achse OC, so erhalten wir, indem wir den Winkel AOC mit α bezeichnen und bemerken, daß $AD = OA \sin\alpha = a \sin\alpha$ ist:

$$v_a = AD \cdot \omega = a\,\omega \sin\alpha ,$$

woraus

$$\omega = \frac{v_a}{a \sin\alpha} = \frac{a\,\omega_1}{a \sin\alpha} = \frac{\omega_1}{\sin\alpha}$$

folgt.

Ferner ist leicht festzustellen, wenn wir uns dem Dreieck AOC zuwenden, daß

$$\sin\alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{OB}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ist.

Folglich ist

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} .$$

Die Richtung der Rotation der Scheibe um die momentane Achse wird aus der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$ des Punktes A bestimmt. Diese Richtung ist in Abb. 248 durch einen Pfeil bezeichnet.

Wir wollen uns nun der Bestimmung der Geschwindigkeit des Punktes M zuwenden. Wir werden diese Geschwindigkeit als Drehgeschwindigkeit um die momentane Achse finden. Folglich gilt, wenn wir die Geschwindigkeit des Punktes M mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen:

$$v = MK \cdot \omega .$$

Dabei ist MK das von dem Punkte M auf die momentane Achse OC gefällte Lot. Beachten wir, daß $MK = 2AD = 2a \sin \alpha$ ist, so finden wir

$$v = 2\, a\, \omega \sin \alpha$$

oder, wenn wir ω substituieren:

$$v = 2\, a\, \omega_1 .$$

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Punkt M und die momentane Achse OC geht, und verläuft in der Rotationsrichtung des Punktes M.

§ 116. Die Vektorenformel der Rotationsgeschwindigkeit

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des starren Körpers eine Rotationsgeschwindigkeit um eine momentane Achse ist. Wir werden jetzt die Vektorenformel für diese Rotationsgeschwindigkeit aufstellen, die in vielen Fällen sehr nützlich ist.

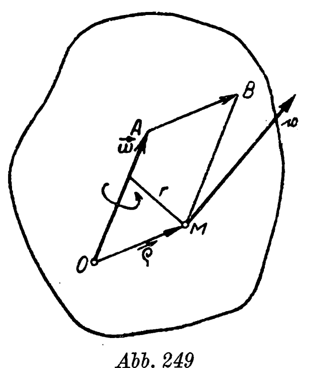


Abb. 249

Es sei ein starrer Körper gegeben, der um den festen Punkt O rotiert (Abb. 249). Wir betrachten den Punkt M dieses Körpers und nennen die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (wir lassen sie auf der momentanen Achse verlaufen). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M verläuft senkrecht zu der Ebene, die durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und durch den Punkt M geht, und zwar in Drehrichtung des Körpers. Die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist gleich

$$v = r\, \omega ,$$

wobei r die Länge des von dem Punkte M auf den Vektor $\vec{\omega}$ gefällten Lotes ist.

Wir bezeichnen den Radius-Vektor $\overline{OM}$ (dem wir die Richtung vom Punkte O nach dem Punkte M zuschreiben) mit $\vec{\varrho}$ und stellen das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{\varrho}$ auf. Dies ist der Vektor, dessen absoluter Betrag gleich der Fläche des Parallelogramms $OABM$ ist, das aus den Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{\varrho}$ konstruiert ist, oder was dasselbe ist, gleich dem Produkt $r\omega$. Der Vektor $\vec{\omega} \times \vec{\varrho}$ steht senkrecht auf der Ebene desselben Parallelogramms, wobei die Senkrechte nach der Seite gezogen sein muß, daß für den sich

auf dieser Senkrechten befindenden Beobachter der Drehsinn $OABM$ als gegen den Uhrzeiger gerichtet erscheint. Wie ersichtlich, fällt das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{\varrho}$ sowohl der Größe als auch der Richtung nach mit dem Vektor $\mathfrak{v}$ zusammen. Auf diese Art erhalten wir die Vektorengleichung

$$\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit eines Punktes ist also gleich dem Vektorprodukt der Winkelgeschwindigkeit des Körpers und des Radiusvektors des gegebenen Punktes. Dabei muß der Radiusvektor von dem festen Punkt nach dem gegebenen Punkt, um den der Körper rotiert, gezogen sein.

§ 117. Die Beschleunigungen der Punkte eines starren Körpers

Benutzen wir die soeben aufgestellte Formel zur Berechnung der Beschleunigung irgendeines Punktes eines rotierenden starren Körpers.

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der um den festen Punkt O rotiert, und nehmen in demselben einen beliebigen Punkt M an (Abb. 250). Gegeben sind der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$. Die Beschleunigung des Punktes M soll ermittelt werden.

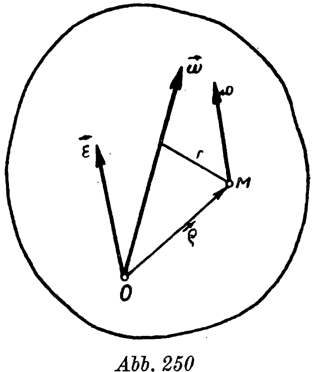


Abb. 250

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes M mit $\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung mit $\mathfrak{w}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Wenn wir hier

$$\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}$$

einsetzen, wobei $\vec{\varrho}$ der Radius-Vektor ist, der von dem festen Punkt O nach dem Punkt M gezogen ist, und uns der Regel der Differentiation des Vektorproduktes (aufgestellt in § 83) erinnern, finden wir

$$\mathfrak{w} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\varrho}}{dt}.$$

Andererseits gilt

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \qquad \frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \mathfrak{v}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \mathfrak{v}.$$

Wenn wir die Bezeichnungen

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} = \mathfrak{w}_1, \qquad \vec{\omega} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{w}_2$$

einführen, erhalten wir

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 .$$

Also setzt sich die gesuchte Beschleunigung $\mathfrak{w}$ aus den Beschleunigungskomponenten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ zusammen. Wir wollen die Größen und die Richtungen dieser Komponenten ermitteln.

Um die Beschleunigung $\mathfrak{w}_1$ zu erhalten, konstruieren wir das Vektorprodukt $\vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho}$. Zu diesem Zweck legen wir von dem Ende des Vektors $\vec{\varrho}$ einen Vektor, der gleich dem Radius-Vektor ist, und aus den Vektoren $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\varrho}$ konstruieren wir das Parallelogramm (Abb. 251). Die Größe der Beschleunigung $\mathfrak{w}_1$ ist der Größe nach gleich der Fläche dieses Parallelogramms. Folglich erhalten wir, wenn wir von dem Punkte M ein Lot auf den Vektor $\vec{\varepsilon}$ fällen und die Länge dieses Lotes mit r_1 bezeichnen:

$$w_1 = r_1 \, \varepsilon .$$

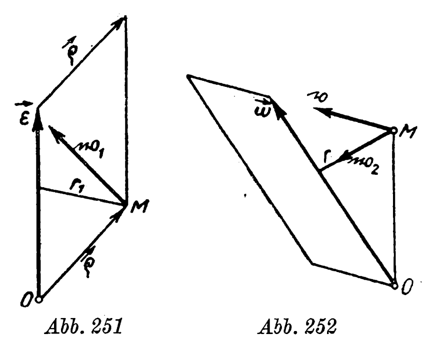


Abb. 251 *Abb. 252*

Die Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_1$ verläuft senkrecht zu der Ebene des konstruierten Parallelogramms oder, was dasselbe ist, zu der Ebene, die durch den Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ und den Punkt M hindurchgeht. Erinnern wir uns der Umfahrungsregel des Parallelogramms, so ist leicht zu bemerken, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}_1$ eine solche Richtung hat, daß sie dem Beobachter, der sich auf dem Vektor $\vec{\varepsilon}$ befindet, als gegen den Uhrzeigersinn gerichtet erscheint. *Die Beschleunigung* $\mathfrak{w}_1$ *werden wir Rotationsbeschleunigung um den Vektor der Winkelbeschleunigung nennen.*

Wir gehen zu der Beschleunigung $\mathfrak{w}_2$ über und ermitteln das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \mathfrak{v}$. Dazu tragen wir vom Ende des Vektors $\vec{\omega}$ den Vektor $\mathfrak{v}$ ab und konstruieren aus den Vektoren $\vec{\omega}$ und $\mathfrak{v}$ ein Parallelogramm (Abb. 252). Da die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\mathfrak{v}$ zueinander senkrecht verlaufen, ist dieses Parallelogramm ein Rechteck. Wir schließen, daß

$$w_2 = \omega \, v$$

ist.

Andererseits ist

$$v = r \, \omega ,$$

wobei r die Länge des von dem Punkte M auf den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gefällten Lotes ist. Folglich ist

$$w_2 = r \, \omega^2 .$$

Die Richtung der Beschleunigung verläuft senkrecht zu der Ebene des aus den Vektoren $\vec{\omega}$ und $\mathfrak{v}$ konstruierten Rechtecks, d. h., sie verläuft auf dem von dem Punkte M auf den Vektor $\vec{\omega}$ gefällten Lote. Nach der bekannten Umfahrungsregel

des Parallelogramms schließen wir, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}_2$ vom Punkte M nach dem Vektor $\vec{\omega}$ oder, was dasselbe ist, nach der momentanen Achse verläuft.

Wie ersichtlich, *ist die Beschleunigung* $\mathfrak{w}_2$ *die zentripetale Beschleunigung bei der Rotation des Körpers um den Vektor* $\vec{\omega}$ *oder um die momentane Achse.*

Die Beschleunigung eines Punktes des starren Körpers setzt sich also aus der Rotationsbeschleunigung um den Vektor der Winkelbeschleunigung und der zentripetalen Beschleunigung der Rotation um den Vektor der Winkelgeschwindigkeit zusammen.

Dieser Satz heißt Theorem von Riwals.

Die Rotation eines Körpers um eine feste Achse kann man als einen Spezialfall der Rotation um einen festen Punkt ansehen. In diesem Spezialfall bewahrt der Vektor der Winkelgeschwindigkeit eine unveränderliche Richtung. Er verläuft auf der festen Rotationsachse. Hieraus folgt, daß auf derselben festen Achse auch der Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ verläuft. Somit fallen bei der Rotation eines Körpers um eine feste Achse die Richtungen der Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{\varepsilon}$ zusammen oder sind einander entgegengesetzt. Es ist leicht zu sehen, daß sich in diesem Fall die Beschleunigungskomponenten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ in die tangentiale und die zentripetale Beschleunigung $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$ verwandeln, von denen in § 94 die Rede war.

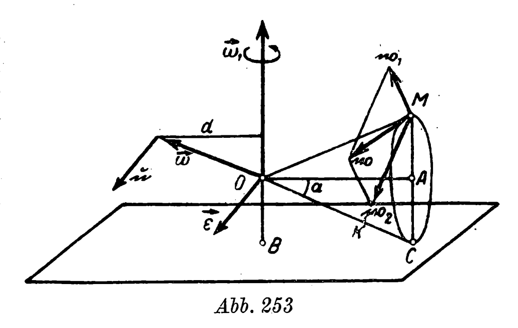


Abb. 253

Beispiel 57. Eine runde Scheibe rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene, wobei ihre horizontale Achse OA sich um die feste vertikale Achse OB mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 dreht; $OA = a$, $OB = b$ (Abb. 253). Die Beschleunigung des höchsten Punktes M der Scheibe ist zu ermitteln.

Wir beginnen mit der Konstruktion des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Scheibe und des Vektors der Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$.

Wir wissen bereits (siehe Beispiel 56), daß die Größe der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe gleich

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}$$

ist, wobei α der Winkel zwischen der Scheibenachse OA und der momentanen Achse OC ist. Diese Größe tragen wir auf der momentanen Achse nach links vom Punkte O ab (so daß ein auf dem Vektor $\vec{\omega}$ befindlicher Beobachter den Eindruck hat, die Rotation der Scheibe um die momentane Achse erfolge entgegen dem Uhrzeigersinn).

Die Winkelbeschleunigung der Scheibe $\vec{\varepsilon}$ finden wir als Geschwindigkeit des Vektorendes der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Der Vektor $\vec{\omega}$ rotiert gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die vertikale Achse OB, ohne seine Größe zu verändern. Bezeichnen wir die Drehgeschwindigkeit des Endes des Vektors $\vec{\omega}$ mit $\mathfrak{u}$, so erhalten wir

$$u = d\,\omega_1,$$

wobei d die Länge des von dem Ende des Vektors $\vec{\omega}$ auf die Achse OB gefällten Lotes ist. Ferner gilt

$$d = \omega \cos \alpha = \omega_1 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Folglich ist

$$u = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verläuft in der horizontalen Ebene senkrecht zum Radius d in Richtung der Drehung des Vektors um die Achse OB. Da die Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ist, schließen wir, daß der Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ auf der Senkrechten verläuft, die im Punkte O zur vertikalen Ebene, die durch die Achsen OA und OB geht, errichtet ist. Die Größe der Winkelbeschleunigung beträgt

$$\varepsilon = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Wir wenden uns nun zum Punkte M und berechnen für diesen Punkt die Beschleunigungen $\mathfrak{w}_1$ (drehende Beschleunigung um den Vektor $\vec{\varepsilon}$) und $\mathfrak{w}_2$ (zentripetale Beschleunigung bei der Rotation um den Vektor $\vec{\omega}$).

Es ist

$$w_1 = OM \cdot \varepsilon$$

(wobei OM das von dem Punkte M auf den Vektor $\vec{\varepsilon}$ gefällte Lot ist). Aus $\triangle OMA$ erhalten wir

$$OM = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Folglich ist

$$w_1 = \frac{a\,\varepsilon}{\cos \alpha} = \frac{a\,\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_1$ verläuft senkrecht zum Vektor $\vec{\varepsilon}$ und zum Abschnitt OM. Für den auf dem Vektor befindlichen Beobachter erscheint sie als gegen den Uhrzeigersinn gerichtet.

Ferner ist

$$w_2 = MK \cdot \omega^2,$$

wobei MK die von dem Punkte M auf die momentane Achse OC gefällte Senkrechte ist. Es ist

$$MK = 2a \sin \alpha$$

und daraus folgt

$$w_2 = 2\,a\,\omega^2 \sin \alpha = \frac{2\,a\,\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_2$ verläuft auf der Geraden MK vom Punkte M nach dem Punkte K.

Die volle Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M setzt sich aus den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ zusammen. Da diese beiden Beschleunigungen in der vertikalen Ebene liegen, die durch die Achse OB und den Punkt M geht, liegt auch die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in dieser Ebene. Wir ermitteln die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ als Diagonale des aus den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_1$

und $\mathfrak{w}_2$ konstruierten Parallelogramms. Erinnern wir uns, daß der in diesem Parallelogramm der Diagonale $\mathfrak{w}$ gegenüberliegende Winkel 2α ist, so erhalten wir

$$w^2 = w_1^2 + w_2^2 - 2\,w_1 w_2 \cos 2\,\alpha = \frac{a^2\,\omega_1^4}{\sin^2\alpha}(5 - 4\cos 2\,\alpha)$$

$$= \frac{a^2\,\omega_1^4}{\sin^2\alpha}(1 + 8\sin^2\alpha) = a^2\,\omega_1^4(9 + \operatorname{ctg}^2\alpha).$$

Substituieren wir hier

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b},$$

so finden wir

$$w = \frac{a}{b}\,\omega_1^2\sqrt{a^2 + 9\,b^2}.$$

§ 118. Die Polkegel

Wir betrachten eine Reihe aufeinanderfolgender Zeiten t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$ usw. und stellen die von unserem starren Körper zu diesen Zeiten eingenommenen Lagen fest, die wir die 1., 2., 3., 4. usw. Lage des Körpers nennen. Wir nehmen an, daß der Körper aus der ersten Lage in die zweite durch Drehung um die Achse OP_1 um den Winkel $\Delta\alpha_1$ verrückt werden kann, aus der zweiten Lage in die dritte durch Drehung um die Achse OP_2 um den Winkel $\Delta\alpha_2$, aus der dritten Lage in die vierte durch Drehung um die Achse OP_3 um den Winkel $\Delta\alpha_3$ usw. (Abb. 254). Der Kürze halber vereinbaren wir, die Drehungen um die Achsen OP_1, OP_2, OP_3 usw. die 1., 2., 3. usw. Drehung zu nennen.

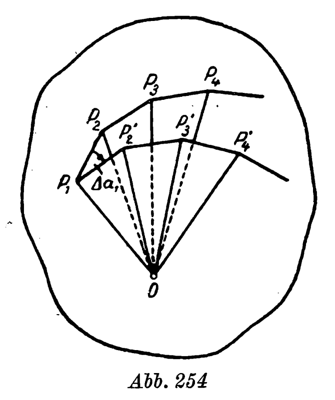


Abb. 254

Führen wir die Ebenen nacheinander durch die Geraden OP_1 und OP_2, OP_2 und OP_3, OP_3 und OP_4 usw., so erhalten wir ein Polyeder $OP_1P_2P_3P_4\ldots$ mit der Spitze im festen Punkte O. Die Kanten dieses Polyeders sind nacheinander die Drehachsen unseres Körpers. Wir werden dieses Polyeder Achsenpolyeder und außerdem „festes" Achsenpolyeder nennen, zum Unterschied von einem anderen Achsenpolyeder, von dem gleich die Rede sein wird.

Wir werden diejenige Gerade OP_2' des starren Körpers konstruieren, die nach der ersten Drehung mit der Geraden OP_2 zusammenfällt und folglich die Drehachse bei der zweiten Drehung ist. Zu diesem Zweck ziehen wir durch die Gerade OP_1 eine Halbfläche, die den Winkel $\Delta\alpha_1$ mit der Kante P_1OP_2 bildet (wobei wir den Winkel $\Delta\alpha_1$ von der Kante P_1OP_2 nach der Seite abtragen, die entgegengesetzt der

Drehung des starren Körpers um die Achse OP_1 ist). In dieser Halbfläche legen wir durch den Punkt O die Gerade OP'_2, die mit der Geraden OP_1 einen Winkel bildet, der gleich dem Winkel P_1OP_2 ist.

Darauf konstruieren wir diejenigen Geraden OP'_3, OP'_4 usw. unserer starren Körper, die nach der 2., 3. usw. Drehung mit den Geraden OP_3, OP_4 usw. zusammenfallen und folglich Drehachsen der 3., 4. usw. Drehung sind.

Das Polyeder $OP_1P'_2P'_3P'_4\ldots$, in dem die Geraden OP_1, OP'_2, OP'_3, OP'_4 usw. als Kanten auftreten, nennen wir „bewegliches" Achsenpolyeder. Als Kanten erscheinen jene Geraden des starren Körpers, die als Drehachsen bei den aufeinanderfolgenden Drehungen des Körpers dienen. Dieses Polyeder ist fest mit dem starren Körper verbunden und bewegt sich zusammen mit diesem. Seine Bewegung können wir kurz charakterisieren, indem wir sagen, daß das bewegliche Achsenpolyeder bei einer angenommenen Bewegung des starren Körpers, die aus einer Reihe von aufeinanderfolgenden Drehungen besteht, ohne zu gleiten auf dem festen Achsenpolyeder abrollt.

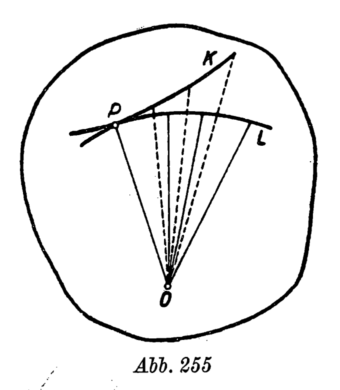


Abb. 255

Wir gehen nun zur Grenze für $\Delta t \to 0$ über. Die Grenzlagen der Drehachsen OP_1, OP_2, OP_3 usw. sind die momentanen Achsen, die den aufeinanderfolgenden Zeiten entsprechen. Die Grenzlage der Achse OP_1 ist die momentane Achse OP, die der Zeit t entspricht (Abb. 255).

Gleichzeitig verwandelt sich das feste Achsenpolyeder im Grenzfall in eine konische Fläche mit der Spitze im festen Punkte O, der den geometrischen Ort der momentanen Achsen im unbeweglichen Raum darstellt. Diese konische Fläche heißt *unbeweglicher oder fester Polkegel*, wir bezeichnen sie mit K.

Das bewegliche Achsenpolyeder verwandelt sich im Grenzfall gleichfalls in eine konische Fläche mit der Spitze im Punkte O, der den gemeinsamen Ort der momentanen Achsen in dem sich bewegenden starren Körper darstellt. Diese konische Fläche ist unveränderlich mit dem starren Körper verbunden und bewegt sich zusammen mit diesem, sie heißt *beweglicher Polkegel*; wir bezeichnen sie mit L.

Da der Winkel $\Delta\alpha_1$ für $\Delta t \to 0$ gegen Null geht, berühren sich beide Polkegel auf ihrer gemeinsamen Erzeugenden OP. Diese gemeinsame Erzeugende erscheint als momentane Drehachse zur Zeit t.

Wir haben gesehen, daß bei einer angenommenen Bewegung des starren Körpers, die aus einer Reihe von aufeinanderfolgenden Drehungen besteht, das bewegliche Achsenpolyeder ohne zu gleiten auf dem festen Achsenpolyeder rollt. Hieraus schließen wir, *daß bei einer tatsächlichen Bewegung des starren Körpers der bewegliche Polkegel ohne zu gleiten auf dem festen Polkegel rollt.*

Somit kann jede Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt als ein Rollen ohne Gleiten einer beweglichen, unveränderlich mit dem starren Körper verbundenen konischen Fläche auf einer unbeweglichen konischen Fläche dargestellt werden.

§ 119. Die Addition der Winkelgeschwindigkeiten

Wir wollen uns einen starren Körper A vorstellen, der um den festen Punkt O rotiert, und ein unveränderliches Medium B, das um denselben Punkt rotiert. Der starre Körper A führe eine absolute Bewegung im Raume und gleichzeitig eine Relativbewegung in bezug auf das Medium B aus. Es ist klar, daß diese Relativbewegung des Körpers A gleichfalls eine Rotation um den festen Punkt O ist. Wir nennen die Bewegung des Körpers A zusammen mit dem Medium B seine übertragene Bewegung. Die absolute Bewegung des Körpers A können wir aus der Relativbewegung in bezug auf das Medium B und eine Bewegung dieses Körpers zusammen mit dem Medium B zusammengesetzt betrachten.

In jeder der drei Bewegungen — der absoluten, der relativen und der übertragenen — existiert in einem gegebenen Augenblick eine eigene momentane Achse und eine eigene Winkelgeschwindigkeit. Wir bezeichnen diese drei Winkelgeschwindigkeiten mit ω, ω_r und ω_e und werden sie die absolute, relative und übertragene Winkelgeschwindigkeit nennen.

Wir wollen zeigen, daß die absolute Winkelgeschwindigkeit gleich der Summe der übertragenen und relativen Winkelgeschwindigkeit ist.

Dazu wollen wir aus den Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_e$ und $\vec{\omega}_r$ (abgetragen auf den entsprechenden momentanen Achsen) das Parallelogramm $Oabc$ konstruieren (Abb. 256) und zeigen, daß die Diagonale Ob dieses Parallelogramms der Größe und Richtung nach die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ darstellt.

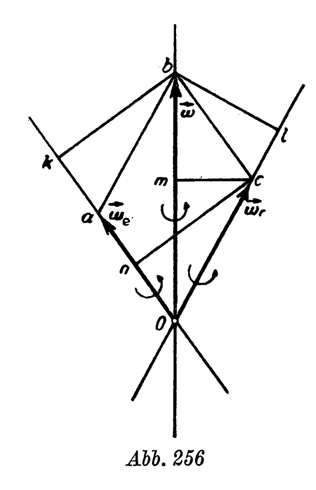


Abb. 256

Um sich davon zu überzeugen, muß man erstens zeigen, daß die Gerade Ob die momentane Achse der absoluten Bewegung ist, zweitens, daß die Länge der Diagonale Ob gleich der Größe ω der absoluten Winkelgeschwindigkeit ist und drittens, daß für den auf der Diagonale Ob (mit den Füßen im Punkte O) befindlichen Beobachter die absolute Drehung als gegen den Uhrzeigersinn gerichtet erscheint.

1. Wir werden zeigen, daß die absolute Geschwindigkeit des Punktes b gleich Null ist. Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes des gegebenen starren Körpers gleich der Summe der translativen und der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ des Punktes:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_e + \mathfrak{v}_r .$$

Wir wollen dieses Theorem auf den Punkt b anwenden. Die translative und die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ des Punktes b sind die Rotationsgeschwindigkeiten um die entsprechenden momentanen Achsen. Folglich erhalten wir, wenn wir die Lote bk und bl von dem Punkte b aus auf diese momentanen Achsen fällen:

$$v_e = bk \cdot \omega_e = bk \cdot Oa ,$$

$$v_r = bl \cdot \omega_r = bl \cdot Oc .$$

Die Produkte $bk \cdot Oa$ und $bl \cdot Oc$ sind jedoch gleich der Fläche des Parallelogramms $Oabc$. Folglich ist $bk \cdot Oa = bl \cdot Oc$ und

$$v_e = v_r .$$

Die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ sind dagegen einander entgegengesetzt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verläuft senkrecht zur Zeichenebene nach der vom Leser fortlaufenden Richtung, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ aber senkrecht zu der Zeichenebene nach der auf den Leser zu laufenden Richtung (die Richtungen der übertragenen und der relativen Rotation sind in der Abbildung mit Pfeilen bezeichnet). Folglich ist die Summe der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_r$ gleich Null, d. h., die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes b ist gleich Null.

Hieraus folgt, daß die Gerade Ob die momentane Achse bei der absoluten Bewegung des Körpers ist.

2. Wir wenden das Additionstheorem der Geschwindigkeiten auf den Punkt c an. Da der Punkt c auf der momentanen Achse der relativen Drehung liegt, ist seine relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ gleich Null. Folglich muß die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes c gleich seiner translativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ sein. Die absolute und die translative Geschwindigkeit des Punktes c sind aber Rotationsgeschwindigkeiten um die entsprechenden momentanen Achsen. Wenn wir von dem Punkte c aus die Lote cm und cn auf diese momentanen Achsen fällen, erhalten wir

$$v = cm \cdot \omega, \qquad v_e = cn \cdot \omega_e = cn \cdot Oa = 2 \triangle Oab = 2 \triangle Obc = Ob \cdot cm .$$

Setzen wir diese Geschwindigkeiten einander gleich, so erhalten wir

$$cm \cdot \omega = Ob \cdot cm$$

oder

$$\omega = Ob .$$

3. Die Richtung der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes c hängt mit der Richtung seiner translativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ zusammen. Folglich verläuft die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes c senkrecht zur Abbildungsebene nach der vom Leser fortlaufenden Richtung. Hieraus ist ersichtlich, daß ein auf dem Abschnitt Ob (mit den Füßen im Punkte O) befindlicher Beobachter den Eindruck hat, die absolute Rotation erfolge entgegen dem Uhrzeigersinn.

Das bewiesene Additionstheorem der Winkelgeschwindigkeiten kann die *Regel des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten genannt werden.*

Dieses Theorem läßt sich leicht für eine beliebige Anzahl von Bewegungskomponenten verallgemeinern.

Stellen wir uns z. B. den starren Körper A und zwei unveränderliche Medien B und C vor. Wir nehmen an, daß sowohl der Körper A als auch die Medien B und C um einen festen Punkt O rotieren. Die absolute Bewegung des Körpers A können wir als eine aus drei Bewegungen zusammengesetzte ansehen: der Relativbewegung des Körpers A in bezug auf das Medium B, der Relativbewegung des Mediums B in bezug auf das Medium C und der übertragenen Bewegung, d. h. der Bewegung des Mediums C.

Alle diese Bewegungen sind Rotationen um den festen Punkt O. Wir werden die Winkelgeschwindigkeiten der drei Bewegungskomponenten entsprechend mit $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ bezeichnen und die Winkelgeschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung mit $\vec{\omega}$.

Wenn wir zuerst die absolute Bewegung des Körpers A als aus seiner Relativbewegung in bezug auf das Medium B und der übertragenen Bewegung zusammen mit dem Medium B zusammengesetzt betrachten und die Winkelgeschwindigkeit des Mediums B mit $\vec{\omega}_2'$ bezeichnen, gilt nach dem Bewiesenen

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2'.$$

Die Bewegung des Mediums B kann man aber als aus seiner Relativbewegung in bezug auf das Medium C und der übertragenen Bewegung zusammen mit dem Medium C zusammengesetzt betrachten. Folglich erhalten wir

$$\vec{\omega}_2' = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

Mithin gilt

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3,$$

d. h., die Winkelgeschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung ist gleich der Summe der Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungskomponenten.

Überhaupt ist, wenn wir die Rotation um einen festen Punkt betrachten, die als eine aus n Rotationskomponenten zusammengesetzte erscheint, die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der zusammengesetzten Rotation gleich der Summe der Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n$ der Rotationskomponenten:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \cdots + \vec{\omega}_n.$$

Mit anderen Worten, die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist die abschließende Seite des aus den Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n$ konstruierten Polygons. Dieses Resultat kann man *Regel des Polygons der Winkelgeschwindigkeiten* nennen.

Beispiel 58. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe aus *Beispiel 55* soll mit Hilfe des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten ermittelt werden.

Die Bewegung der Scheibe kann man als eine aus zwei Bewegungen zusammengesetzte betrachten: Der Rotation um die Achse OB zusammen mit dem Stabe OA und der relativen Rotation um diesen Stab.

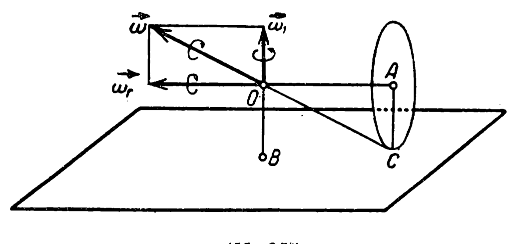


Abb. 257

Die übertragene Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ muß auf der Achse OB verlaufen (nach oben, wenn, wie wir voraussetzten, die Rotation des Stabes OA um die Achse OB gegen den Uhrzeigersinn erfolgt). Die relative Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_r$ und die gesuchte absolute Winkelgeschwindigkeit der Scheibe $\vec{\omega}$ verlaufen auf der Geraden OA bzw. der momentanen Achse OC. Wenn wir das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten konstruieren

(Abb. 257), finden wir aus diesem Parallelogramm den Ausdruck der absoluten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}$$

oder, wenn wir beachten, daß $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ist,

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Die Richtung der absoluten Rotation wird durch die Richtung der absoluten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bestimmt.

§ 120. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit in Richtung der mit dem starren Körper verbundenen Koordinatenachsen

Wir stellen uns einen starren Körper A vor, der um einen festen Punkt O rotiert. Wir nennen die zueinander senkrechten festen Achsen x, y und z und die zueinander senkrechten beweglichen Achsen ξ, η und ζ, die unveränderlich mit dem starren Körper verbunden sind (Abb. 258). Die Umrisse des Körpers A sind in der Abbildung nicht dargestellt. Wir führen die EULERschen Winkel ϑ, ψ, φ ein und nehmen an, daß die Bewegung unseres starren Körpers durch die Bewegungsgleichungen

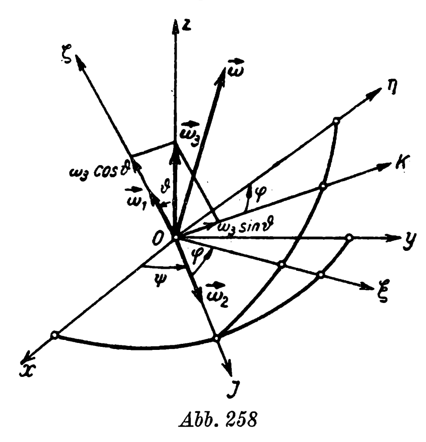


Abb. 258

$$\vartheta = f_1(t), \qquad \psi = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t)$$

bestimmt wird.

Wir konstruieren die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Körpers A zur Zeit t und berechnen die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit auf den Achsen ξ, η und ζ.

Zu diesem Zweck benutzen wir das Additionstheorem der Winkelgeschwindigkeiten. Wir stellen uns zwei unveränderliche Medien B und C vor, von denen das Medium C um die feste Achse z zusammen mit der Geraden OJ rotiert[1], das Medium B aber eine Relativbewegung in bezug auf das Medium C ausführt, indem es sich zusammen mit der Achse ζ um die Achse OJ dreht. Die Relativbewegung des Körpers A in bezug auf das Medium B wird eine Rotation um die Achse ζ sein.

Die absolute Bewegung des Körpers A können wir als aus seiner Relativbewegung in bezug auf das Medium B und der Relativbewegung des Mediums B in bezug auf das Medium C und der Bewegung mit dem Medium C zusammengesetzt betrachten.

[1] Wir erinnern daran, daß die Gerade OJ Schnitt der Ebene xOy und $\xi O \eta$ ist.

Folglich erhalten wir, wenn wir die Winkelgeschwindigkeiten dieser drei Bewegungskomponenten entsprechend mit $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ bezeichnen:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 .$$

Da die Bewegungskomponenten Rotationen um konstante Achsen sind, lassen sich die Größen der Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ leicht errechnen. Sie sind gleich den Ableitungen der entsprechenden Drehwinkel nach der Zeit.

Als Drehwinkel der relativen Rotation des Körpers A in bezug auf das Medium B erscheint der Winkel φ, bei der relativen Rotation des Mediums B in bezug auf das Medium C der Winkel ϑ, und bei der Rotation des Mediums C der Winkel ψ. Folglich gilt:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \omega_2 = \frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \omega_3 = \frac{d\psi}{dt} .$$

Diese Winkelgeschwindigkeiten müssen auf den entsprechenden Rotationsachsen abgetragen werden, d. h. $\vec{\omega}_1$ auf der ζ-Achse, $\vec{\omega}_2$ auf der Achse OJ, $\vec{\omega}_3$ auf der z-Achse.

Wir bezeichnen die gesuchten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf den Achsen ξ, η und ζ mit p, q, r und die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ und $\vec{\omega}_3$ auf denselben Achsen mit $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3$. Wenn wir beachten, daß die Projektion der Summe gleich der Summe der Projektionen der Komponenten ist, erhalten wir

$$p = p_1 + p_2 + p_3 , \qquad q = q_1 + q_2 + q_3 , \qquad r = r_1 + r_2 + r_3 .$$

Nun müssen noch die Komponenten $p_1, q_1, \ldots, r_3$ berechnet werden.

Wenn wir uns an die Abbildung 258 halten, finden wir

$$p_1 = 0 , \qquad q_1 = 0 , \qquad r_1 = \frac{d\varphi}{dt} ,$$

$$p_2 = \frac{d\vartheta}{dt} \cos\varphi , \qquad q_2 = -\frac{d\vartheta}{dt} \sin\varphi , \qquad r_2 = 0 .$$

Um die Komponenten p_3, q_3 und r_3 zu berechnen, zerlegen wir zuvor die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_3$ in zwei Komponenten, von denen die eine auf der ζ-Achse verläuft, die andere aber in der Ebene $\xi O \eta$ liegt. Die erste Komponente ist gleich $\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta$, die zweite aber gleich $\frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta$ und verläuft auf der Geraden OK, die in der Ebene $\zeta O \eta$ liegt und senkrecht zu der Geraden OJ verläuft. Wenn wir dann diese zweite Komponente in Richtung der Achsen ξ und η zerlegen und bemerken, daß die Gerade OK mit den Achsen ξ und η die Winkel $90° - \varphi$ bzw. φ bildet, finden wir:

$$p_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta \sin\varphi , \qquad q_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta \cos\varphi ,$$

$$r_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta .$$

Somit kommen wir zu den folgenden endgültigen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi\,, \\ q &= \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi\,, \\ r &= \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nach diesen Formeln können die Komponenten p, q und r der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ berechnet werden, wenn die EULERschen Winkel ϑ, ψ und φ als Funktionen der Zeit t vorgegeben sind.

Nachdem wir diese Komponenten errechnet haben, können wir die Größe und die Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nach den Formeln

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,,$$

$$\cos(\vec{\omega}, \xi) = \frac{p}{\omega}\,, \qquad \cos(\vec{\omega}, \eta) = \frac{q}{\omega}\,, \qquad \cos(\vec{\omega}, \zeta) = \frac{r}{\omega}$$

ermitteln.

Die Formeln (1) sind die Grundformeln bei der analytischen Untersuchung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

§ 121. Die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes eines starren Körpers, bezogen auf die mit dem Körper verbundenen Koordinatenachsen

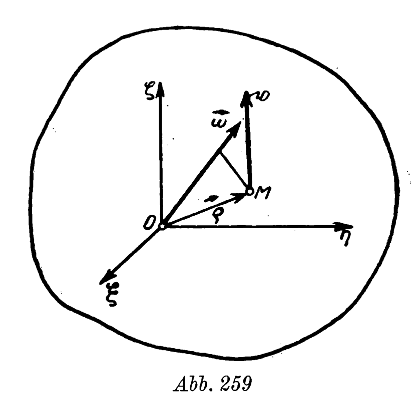


Abb. 259

Wir wollen die in § 59 aufgestellten Formeln zur Berechnung der Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes eines rotierenden Körpers auf den mit dem Körper verbundenen beweglichen Achsen benutzen.

Für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ irgendeines Punktes M eines Körpers gilt die Formel

$$\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}\,,$$

wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers und $\vec{\varrho}$ der Radius-Vektor ist, der vom festen Punkte O, um den der Körper rotiert, nach dem gegebenen Punkt gezogen ist (Abb. 259).

Wir betrachten das bewegliche Koordinatensystem ξ, η und ζ mit dem Ursprung im festen Punkt O. Die Komponenten des Radiusvektors $\vec{\varrho}$ auf den Achsen ξ, η und ζ sind die Koordinaten ξ, η und ζ des Punktes M. Bezeichnen wir die Komponenten

der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf diesen Achsen mit p, q, r und die gesuchten Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit v_ξ, v_η, v_ζ und wenden die in § 59 aufgestellten Formeln für die Komponenten des Vektorprodukts zweier Vektoren an, so erhalten wir

$$v_\xi = q\zeta - r\eta,$$

$$v_\eta = r\xi - p\zeta,$$

$$v_\zeta = p\eta - q\xi.$$

Diese Formeln finden weitgehende Verwendung bei der analytischen Untersuchung der Rotation eines starren Körpers.

KAPITEL XIX

DIE ALLGEMEINE BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS

§ 122. Die Zerlegung der Bewegung eines starren Körpers in eine fortschreitende Bewegung und eine Rotation. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. Die Winkelgeschwindigkeit

Wir wenden uns nun dem Studium des allgemeinsten Falles der Bewegung eines starren Körpers zu und stellen uns einen starren Körper vor, der eine beliebige Bewegung ausführt.

Wir werden zeigen, *daß die allgemeinste Bewegung des starren Körpers in eine fortschreitende und eine drehende Bewegung zerlegt werden kann.*

Wir wählen einen beliebigen Punkt O des starren Körpers (Abb. 260), den wir Pol nennen und nehmen an, daß die Kurve AB die Bewegungsbahn ist, die vom Punkte O bei der Bewegung des Körpers beschrieben wird. Danach stellen wir uns ein unveränderliches Medium vor, das sich fortschreitend zusammen mit dem Pol O bewegt. Wenn der starre Körper seine absolute Bewegung im Raume ausführt, beschreibt er gleichzeitig irgendeine Relativbewegung in bezug auf das erwähnte Medium. Wir vereinbaren, diese Relativbewegung der Kürze halber die Relativbewegung des Körpers „in bezug auf den Pol O" zu nennen. Da der Pol O an dieser Relativbewegung des Körpers nicht teilnimmt (d. h., er bleibt relativ in Ruhe), ist die Relativbewegung des Körpers in bezug auf den Pol O die Rotation um diesen Pol.

Somit stellt sich die absolute Bewegung des starren Körpers als aus der fortschreitenden Bewegung zusammen mit dem Pol O und der Rotation um diesen Pol zusammengesetzt dar.

Der fortschreitende Teil der Bewegung eines starren Körpers wird eindeutig durch die Bewegung des Poles O bestimmt. Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes O in bezug auf die zueinander senkrechten Koordinatenachsen x, y und z mit x_0, y_0 und z_0. Die Bewegung des Poles O (und gleichzeitig auch der fortschreitende Teil der Bewegung des starren Körpers) wird eindeutig durch die Bewegungsgleichungen

$$x_0 = f_1(t), \qquad y_0 = f_2(t), \qquad z_0 = f_3(t) \tag{1}$$

bestimmt.

Die Rotation des Körpers um den Pol O kann jedoch ebenso bestimmt werden, wie es in § 111 erklärt wurde. Wir ziehen durch den Punkt O drei zueinander senkrechte Achsen a, b und c, die sich fortschreitend zusammen mit dem Punkt O bewegen, wobei sie parallel zu den festen Achsen x, y und z bleiben. Danach betrachten wir die drei zueinander senkrechten Achsen ξ, η und ζ mit dem Ursprung in demselben Punkte O, die unveränderlich mit dem starren Körper verbunden sind. Wenn wir die EULERschen Winkel ϑ, ψ und φ einführen, können wir die rotierende Bewegung des Körpers um den Pol O durch die Bewegungsgleichungen

$$\vartheta = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t) \tag{2}$$

bestimmen.

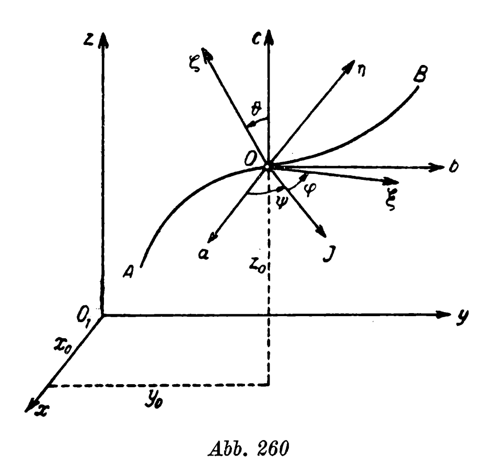


Abb. 260

Durch die Gln. (1) und (2) wird die Bewegung des starren Körpers eindeutig bestimmt. Wir nennen diese Gleichungen *Bewegungsgleichungen des starren Körpers.*

In der Rotationsbewegung eines starren Körpers um den Punkt O gibt es in jedem gegebenen Augenblick eine momentane Achse (die durch den Punkt O geht) und eine Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, die auf der momentanen Achse verläuft, sowie auch eine Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$. Wenn die Rotationsgleichungen (2) gegeben sind, können Größe und Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nach den in § 120 aufgestellten Formeln bestimmt werden.

Da als Pol ein beliebiger Punkt des starren Körpers gewählt werden kann, können wir, wenn wir verschiedene Punkte des Körpers als Pole wählen, eine unendliche Anzahl von Zerlegungen der Bewegung des starren Körpers in einen fortschreitenden und einen rotierenden Teil erhalten. Natürlich verändert sich der fortschreitende Teil der Bewegung mit der Veränderung des Poles. Wir werden zeigen, *daß der rotierende Teil der Bewegung eines starren Körpers nicht von der Wahl des Poles abhängt.*

Wir wählen als Pol den Punkt O, der die Kurve AB beschreibt (Abb. 261), und stellen die Gleichungen der Rotation um diesen Pol auf. Zu diesem Zweck ziehen wir

durch den Punkt O die Achsen a, b und c, die sich fortschreitend bewegen, wobei sie parallel zu den festen Achsen x, y und z bleiben, und die Achsen ξ, η und ζ, die unveränderlich mit dem starren Körper verbunden sind.

Nachdem wir die EULERschen Winkel ϑ, ψ und φ festgelegt haben, erhalten wir die Gleichungen der Rotation um den Pol O:

$$\vartheta = f_4(t), \qquad \psi = f_5(t), \qquad \varphi = f_6(t).$$

Nun wollen wir als Pol einen anderen Punkt des Körpers, und zwar O_1, annehmen, der die Bewegungsbahn A_1B_1 beschreibt. Wir wollen die Gleichungen der Rotation um diesen neuen Pol aufstellen. Dazu führen wir durch den Punkt O_1 die Achsen a_1, b_1 und c_1, die sich fortschreitend bewegen, wobei sie parallel zu den festen Achsen x, y und z bleiben, und die Achsen ξ_1, η_1, ζ_1, die unveränderlich mit dem starren Körper verbunden sind. Da die Wahl dieser letzten Achsen in unserem Belieben liegt, wollen wir die Achsen ξ_1, η_1, ζ_1 parallel zu den Achsen ξ, η, ζ legen. In einem solchen Falle werden die Achsen a_1, b_1 und c_1 während der gesamten Bewegungszeit parallel zu den Achsen a, b und c bleiben (da sowohl diese wie jene sich fortschreitend bewegen), die Achsen ξ_1, η_1, ζ_1 aber werden parallel zu den Achsen ξ, η, ζ verbleiben (da sowohl die einen als auch die anderen unveränderlich mit dem starren Körper verbunden sind). Nachdem wir die EULERschen Winkel, die beim Punkte O_1 konstruiert sind, mit ϑ_1, ψ_1 und φ_1 bezeichnet haben, gilt folglich während der gesamten Zeit der Bewegung:

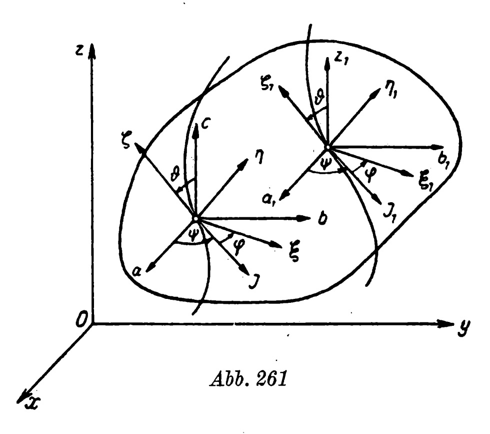


Abb. 261

$$\vartheta_1 = \vartheta, \qquad \psi_1 = \psi, \qquad \varphi_1 = \varphi.$$

Also sind die Gleichungen der Rotation um den Pol O_1: $\vartheta_1 = f_4(t)$, $\psi_1 = f_5(t)$, $\varphi_1 = f_6(t)$ identisch mit den Gleichungen der Rotation um den Pol O, d. h., der rotierende Teil der Bewegung des Körpers hängt nicht von der Wahl des Poles ab.

Hieraus können wir die Schlußfolgerung ziehen, daß auch die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Teiles der Bewegung des Körpers und ebenso auch die Winkelbeschleunigung nicht von der Wahl des Poles abhängen, d. h., daß die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ und $\vec{\omega}_1$ und ebenso die Winkelbeschleunigungen $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\varepsilon}_1$ der rotierenden Bewegung um den Pol O und O_1 entsprechend gleich sind.

Auf dieser Grundlage haben wir das Recht, die für alle Pole gemeinsame Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und die Winkelbeschleunigung $\vec{\varepsilon}$ einfach Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des starren Körpers zu nennen (ohne irgendwelche Hinweise darauf, welcher Punkt des Körpers als Pol vorausgesetzt wird).

§ 123. Die Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers. Die momentane Schraubenachse

Wir stellen uns die Bewegung eines starren Körpers als in die translative (fortschreitende) Bewegung zusammen mit dem Pol O und die relative (rotierende) Bewegung in bezug auf diesen Pol zerlegt vor (Abb. 262). Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers kann mit Hilfe des Additionstheorems der Geschwindigkeiten ermittelt werden. Die absolute Geschwindigkeit des Punktes M ist gleich der Summe aus seiner translativen und seiner relativen Geschwindigkeit.

Die translative Geschwindigkeit des Punktes M ist gleich der Geschwindigkeit des Poles O. Wir werden diese Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}_0$ bezeichnen. Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ aber des Punktes M ist die rotierende Geschwindigkeit um die momentane Achse, die durch den Punkt O geht. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Körpers mit $\vec{\omega}$ und die Länge des von dem Punkte M auf die momentane Achse gefällten Lotes mit r, so gilt:

$$v_r = r \cdot \omega .$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ verläuft senkrecht zu der Ebene, die durch den Punkt M und die momentane Achse (oder die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$) geht.

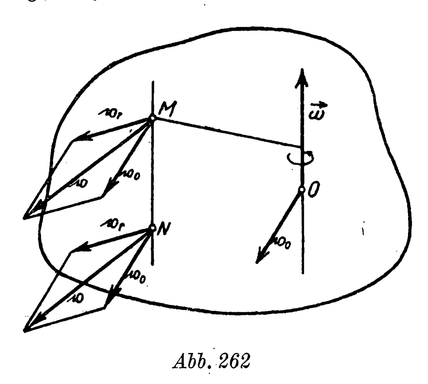


Abb. 262

Die absolute Geschwindigkeit des Punktes M ist die Diagonale des aus den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_r$ konstruierten Parallelogramms. *Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes eines starren Körpers ist also gleich der Summe der Geschwindigkeit des Poles und der Geschwindigkeit des gegebenen Punktes bei der rotierenden Bewegung um diesen Pol.*

Wir ziehen durch den Punkt M eine Gerade, die parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verläuft, und nehmen auf dieser Geraden irgendeinen Punkt N an. Die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes N um die durch den Pol O verlaufende Achse ist gleich der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ des Punktes M. Folglich ist auch die absolute Geschwindigkeit des Punktes N gleich der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M. Alle Punkte eines starren Körpers, die auf einer Geraden liegen, die parallel zu der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verläuft, haben also gleiche Geschwindigkeiten. Wir werden nun zeigen, *daß es in jedem gegebenen Augenblick eine unendliche Anzahl von Punkten des Körpers gibt, deren Geschwindigkeiten parallel zu der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verlaufen.*

Wir wählen als Pol den Punkt O (Abb. 263) und nennen die Geschwindigkeit des Poles $\mathfrak{v}_0$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des starren Körpers. Wir zerlegen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ in zwei Komponenten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, von denen die erste parallel zu der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verläuft, die zweite aber senkrecht zu derselben. Darauf errichten wir im Punkte O auf der durch $\mathfrak{v}_0$ und $\vec{\omega}$ gehenden Ebene eine Senkrechte

nach der Seite, daß ein auf dieser Senkrechten befindlicher Beobachter (mit den Füßen im Punkte O), der in der Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ blickt, den Eindruck hat, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ sei von rechts nach links gerichtet. Auf dieser Senkrechten messen wir vom Punkte O den Abschnitt $OP = \frac{v_2}{\omega}$ ab. Wir wollen die Geschwindigkeit des Punktes P ermitteln.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes P ist die Diagonale des Parallelogramms, das aus der Geschwindigkeit des Poles $\mathfrak{v}_0$ und der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ des Punktes P um die durch den Punkt O verlaufende momentane Achse konstruiert ist. Die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ ist gleich

$$v_r = O\,P \cdot \omega = \frac{v_2}{\omega} \cdot \omega = v_2.$$

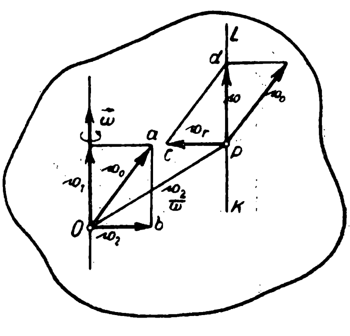


Abb. 263

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ aber steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Punkt P und die momentane Achse geht, d. h. parallel auf der Komponente $\mathfrak{v}_2$. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, verläuft die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ entgegengesetzt zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$.

Folglich sind die Seiten Oa und Ob des Dreiecks Oab gleich und parallel den Seiten cd und cP des Dreiecks cdP. Hieraus folgt, daß auch die dritten Seiten ba und Pd dieser Dreiecke gleich und parallel sind, d. h., die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes P ist gleich der Komponente $\mathfrak{v}_1$ der Geschwindigkeit des Punktes O.

Die Geschwindigkeit des Punktes P verläuft also parallel zu der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Wir ziehen nun durch den Punkt P die Gerade KL, die parallel zu der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verläuft. Wir wissen bereits, daß alle auf dieser Geraden liegenden Punkte gleiche Geschwindigkeiten haben.

Folglich sind die Geschwindigkeiten aller auf der Geraden KL liegenden Punkte parallel der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Mit anderen Worten, die Geschwindigkeiten aller dieser Punkte verlaufen auf der Geraden KL.

Wir wählen nun als Pol irgendeinen auf der Geraden KL liegenden Punkt O_1 (Abb. 264) und ermitteln die Geschwindigkeit irgendeines Punktes M des starren Körpers. Die Geschwindigkeit des Poles $\mathfrak{v}_1$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ verlaufen auf der Geraden KL. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M ist die Diagonale des Parallelogramms, das aus der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ des Poles und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ der Rotation des Punktes M um die momentane Achse, welche durch den Pol O_1 geht, (d. h. um die Gerade KL), konstruiert ist. Bezeichnen wir die Länge des von dem Punkte M aus auf die Gerade KL gefällten Lotes mit r, so erhalten wir

$$v_r = r\,\omega.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ steht senkrecht auf der durch den Punkt M und die Gerade KL verlaufenden Ebene.

Hieraus ist ersichtlich, daß die Geschwindigkeiten der Punkte des starren Körpers im gegebenen Augenblick derartig sind, als würde sich die Bewegung des starren Körpers aus der fortschreitenden Bewegung längs der Geraden KL und der Rotation um diese Gerade zusammensetzen. Eine aus der fortschreitenden Bewegung längs irgendeiner Geraden und der Rotation um diese Gerade zusammengesetzte Bewegung nennt man *Schraubenbewegung* (dies ist die Bewegung einer Schraube in der Mutter). Folglich sind die Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers im gegebenen Augenblick derartig, als führte der Körper eine Schraubenbewegung längs und um die Gerade KL aus. Aus diesem Grunde heißt die Gerade KL *momentane Schraubenachse.*

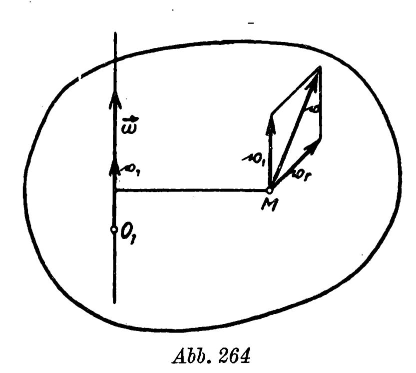


Abb. 264

Den verschiedenen Zeiten entsprechen verschiedene momentane Schraubenachsen. Die momentane Schraubenachse verändert im Laufe der Zeit ihre Lage sowohl im festen Raum als auch in dem sich bewegenden starren Körper. Der geometrische Ort der momentanen Schraubenachsen im unbeweglichen Raum ist eine Fläche, die *unbewegliches Axoid der momentanen Schraubenachse* genannt wird. Der geometrische Ort derselben Achsen in dem sich bewegenden Körper ist eine andere Fläche, die *bewegliches Axoid der momentanen Schraubenachse* genannt wird.

Man kann sich davon überzeugen, daß sich in jedem gegebenen Augenblick beide Axoide auf der gemeinsamen Erzeugenden berühren, die als momentane Schraubenachse für den gegebenen Augenblick erscheint.

Bei der Bewegung des starren Körpers rollt das bewegliche Axoid auf dem unbeweglichen Axoid und gleitet gleichzeitig längs der ihnen gemeinsamen Erzeugenden.

Also kann die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers als Rollen einer Fläche auf einer anderen dargestellt werden, verbunden mit einem Gleiten längs ihrer gemeinsamen Erzeugenden.

§ 124. Die Addition der Beschleunigungen bei einer beliebigen translativen Bewegung

In Kapitel XVI haben wir das Additionstheorem der Beschleunigungen in nur zwei Spezialfällen betrachtet, nämlich im Falle einer fortschreitenden translativen Bewegung und in dem Falle, daß die Bewegung eine Rotation um eine feste Achse ist. Jetzt haben wir die Möglichkeit, die Untersuchung dieser Frage zu ergänzen, indem wir das Additionstheorem der Beschleunigungen im allgemeinsten Fall irgendeiner beliebigen translativen Bewegung betrachten.

Wir stellen uns ein unveränderliches Medium, das irgendeine beliebige Bewegung im Raume ausführt, und den sich im Medium bewegenden Punkt M vor (Abb. 265). Unter der Voraussetzung, daß die Lage des in Abb. 265 mit dem Buchstaben M bezeichneten Punktes der Zeit t entspricht, konstruieren wir genau so wie in § 99 die Lage M_1 dieses Punktes, die der Zeit $t + \Delta t$ entspricht. Darauf konstruieren wir die elementaren Verrückungen $\overline{MM_1'}$, $\overline{MM'}$ und $\overline{M'M_1'}$ der absoluten, der relativen und der translativen Bewegung unseres Punktes und nehmen an

$$\overline{MM_1'} = \mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\mathfrak{w}(\Delta t)^2 + \mathfrak{a}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathfrak{v}_e\,\Delta t + \frac{1}{2}\mathfrak{w}_e(\Delta t)^2 + \mathfrak{b}_3,$$

$$\overline{M'M_1'} = \mathfrak{v}_r'\,\Delta t + \frac{1}{2}\mathfrak{w}_r'(\Delta t)^2 + \mathfrak{c}_3,$$

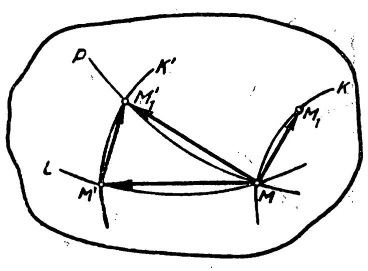


Abb. 265

wobei $\mathfrak{v}_r'$ und $\mathfrak{w}_r'$ die relative Geschwindigkeit bzw. die relative Beschleunigung des Punktes M während der Zeit Δt sind, während der er zusammen mit dem Medium verrückt wird, und $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{c}_3$ kleine Vektoren dritter Ordnung bedeuten. Wenn wir nun genauso wie in § 99 überlegen, erhalten wir

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_c,$$

wobei $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}_e$ und $\mathfrak{w}_r$ die absolute, die translative und die relative Beschleunigung des Punktes M sind; $\mathfrak{w}_c$ ist aber die Coriolis-Beschleunigung, die nach der Formel

$$\mathfrak{w}_c = 2 \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathfrak{v}_r' - \mathfrak{v}_r}{\Delta t}\right]$$

bestimmt wird.

Im allgemeinen Falle einer beliebigen translativen Bewegung des Mediums ist also *die absolute Beschleunigung gleich der Summe der translativen, der relativen und der* Coriolis-*Beschleunigung.*

Um Größe und Richtung der Coriolis-Beschleunigung zu ermitteln, wählen wir einen beliebigen Punkt O des Mediums als Pol und zerlegen die Bewegung des Mediums in eine fortschreitende Bewegung zusammen mit dem Pol O und eine Rotation um diesen Pol. Wir tragen vom Pol O die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ ab und bezeichnen den Punkt des Mediums, mit dem das Ende des Vektors $\mathfrak{v}_r$ zusammenfällt, mit A.

Wir wollen die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Punktes A bei der rotierenden Bewegung des Mediums um den Pol O ermitteln.

Die Vektoren $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_r'$ sind die Radius-Vektoren, die vom Pol O nach dem Punkte A entsprechend den Zeiten t und $t + \Delta t$ gezogen sind. Hieraus folgt, daß

$$\mathfrak{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathfrak{v}_r' - \mathfrak{v}_r}{\Delta t}\right]$$

ist.

Somit erhalten wir

$$\mathfrak{w}_c = 2\mathfrak{u}.$$

Andererseits wissen wir, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Punktes A der rotierenden Bewegung des Mediums um den Pol O die Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Achse ist, oder, was dasselbe ist, um den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, abgetragen vom Pol O (Abb. 266).

Folgliche ist die Coriolis-*Beschleunigung* $\mathfrak{w}_c$ *der Größe und Richtung nach gleich der doppelten Rotationsgeschwindigkeit (um die durch den Pol O gelegte momentane Achse) des Punktes A.*

Abb. 266

Die Regel für die Bestimmung der Coriolis-Beschleunigung bleibt, wie wir sehen, die gleiche wie in § 99. Man muß nur die feste Achse ersetzen.

Wenn wir uns der Vektorenformel für die Rotationsgeschwindigkeit erinnern und beachten, daß als Radius-Vektor des Punktes A der Vektor $\mathfrak{v}_r$ erscheint, erhalten wir

$$\mathfrak{u} = \vec{\omega} \times \mathfrak{v}_r$$

und folglich:

$$\mathfrak{w}_c = 2\,\vec{\omega} \times \mathfrak{v}_r.$$

Mit dieser Formel wird die Coriolis-Beschleunigung im allgemeinsten Fall bestimmt.

NAMEN- UND SACHREGISTER